Die Regularität von Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die das Energieintegral unter einer Hindernisbedingung minimieren

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Frank Duzaar
aus Krefeld

Düsseldorf 1985

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543905_0105

DIE REGULARITÄT VON ABBILDUNGEN ZWISCHEN RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN, DIE DAS ENERGIEINTEGRAL UNTER EINER HINDERNISBEDINGUNG MINIMIEREN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

FRANK DUZAAR

aus Krefeld

Düsseldorf 1985

Inhalt

Einleitung	1
§1 Notationen und Hilfssätze	10
§2 Die Variationsgleichung	17
§3 Partielle Regularität	45
Zusammenfassung	74
Literaturverzeichnis	76

Einleitung

Eines der Variationsprobleme, das für den Physiker und Mathematiker gleichermaßen von großem Interesse war, ist das Problem der kürzesten Verbindung zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten einer Riemannschen Mannigfaltikeit Y. Geodätische (lokal kürzeste Verbindungen) erweisen sich dabei als proportional zur Bogenlänge parametrisierte kritische Punkte des Energiefunktionals

$$(1) \qquad E(c) := \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial c}{\partial t} \right|^2 dt \quad ,$$

wobei $c : [0,1] \longrightarrow Y$ eine Parametrisierung des Weges ist. Für berandete Mannigfaltigkeiten Y führt uns die Frage nach der kürzesten Verbindung in Y in natürlicher Weise auf ein Hindernisproblem, bei dem der Rand von Y die Rolle des Hindernisses spielt.

Verschiedene höherdimensionale Versionen dieser Problemstellung sind möglich. Ersetzt man z.B. das Längenintegral durch das Flächenintegral von Abbildungen einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ nach Y, so ergeben sich Hindernisaufgaben für parametrische Minimalflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Die Verallgemeinerung des Energiebegriffs auf Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten führt dagegen auf Hindernisprobleme bei harmonischen Abbildungen.

Im folgenden nehmen wir an, daß X eine n-dimensionale berandete Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Innerem Ω und Rand $\partial\Omega$ und Y eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^1$ ist. (Die zweite Annahme ist gerechtfertigt, da man abstrakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten nach dem Einbettungssatz von Nash als abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten in einen euklidischen Raum mit genügend großer Dimension isometrisch einbetten kann.) Zur Behandlung

von Problemen, in denen das Energiefunktional minimimiert wird, führt man in der Variationsrechnung üblicherweise den Sobolev-Raum $W^{1,2}(\Omega,\mathcal{Y})$ ein. Dieser besteht aus allen $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ -Abbildungen $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$ für die es eine H^n Nullmenge $N \subset \Omega$ derart gibt, daß das Bild von $\Omega \setminus N$ unter u in $\mathcal{Y}$ enthalten ist. Dabei bezeichnet H^n das durch die Metrik auf Ω invariant definierte n-dimensionale Hausdorff-Maß und $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ den üblichen Sobolev-Raum (vgl. auch §1). Einer $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ -Abbildung u können wir H^n-fast überall eine Energiedichte e(u)(x) vermöge

$$e(u)(x) := |du(x)|^2 \tag{2}$$

zuordnen. Die Gesamtenergie einer $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ -Abbildung ist dann durch

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} e(u)(x)\,dH^n(x) \tag{3}$$

gegeben.

Die Aufgabe das Energiefunktional in $W^{1,2}(\Omega,\mathcal{Y})$ (etwa bei gegebenen Randwerten) zu minimieren ist im Prinzip ein Hindernisproblem, wenn $\mathcal{Y}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^1$ mit nichtleerem Rand ist; denn dann werden energieminimierende Abbildungen im allgemeinen teilweise am "Hindernis" $\partial\mathcal{Y}$ anliegen, derart daß sie bei "Fortsetzung" von $\mathcal{Y}$ über den Rand hinaus in eine energetisch günstigere Abbildung mit Werten "jenseits des Randes" übergehen würden, was indes durch die Hindernisbedingung $u(\Omega \setminus N) \subset \mathcal{Y}$ verhindert wird.

In unserer Arbeit untersuchen wir das Regularitätsverhalten von lokal in $W^{1,2}(\Omega,\mathcal{Y})$ energieminimierenden Abbildungen. Dabei nennen wir eine Abbildung u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\mathcal{Y})$ energieminimierend, wenn alle $W^{1,2}(\Omega,\mathcal{Y})$-Vergleichsabbildungen mit gleichen Randwerten

größere Energie als u besitzen, d.h. für alle $v \in W^{1,2}(\Omega,\mathcal{Y})$ mit $u - v \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ gilt $E(u) \leq E(v)$. Derartige Abbildungen treten natürlicherweise bei Minimierung des Energiefunktionals unter Dirichlet-Randbedingungen auf. Die Existenz solcher Minima läßt sich etwa bei kompaktem $\mathcal{Y}$ mit relativ einfachen Mitteln nachweisen (direkte Methode der Variationsrechnung).

Im folgenden nennen wir $\mathcal{Y}$ die "zulässige Menge" und $\partial\mathcal{Y}$ das "Hindernis". In der speziellen Situation, daß $\mathcal{Y}$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^1$ ist, wollen wir $\mathbb{R}^1 \setminus (\mathcal{Y} \cup \partial\mathcal{Y})$ als Hindernis ansehen.

Erste Regularitätsuntersuchungen für parametrische Minimalflächen bzw. harmonische Abbildungen unter Hindernisbedingungen wurden im Fall $n = 2$ von Hildebrandt [H1],[H2],[H3], und Tomi[T1],[T2], durchgeführt. Die dabei auftretenden zulässigen Mengen lassen sich im wesentlichen durch eine Ungleichung für eine reelle Funktion mit nicht verschwindendem Gradienten beschreiben. Beide Autoren benutzen in ihren Regularitätsbeweisen die Morrey-Methode [M], die sich nicht ohne weiteres auf Dimensionen $n \geq 3$ verallgemeinern läßt.

Für die spezielle Klasse der "Graphenhindernisse", d.h. die zulässige Menge ist von der Form $\mathbb{R}^1 \supset \mathcal{Y} := \{(x',x^1) \in \mathbb{R}^1 : x^1 \geq f(x')\}$ mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^{1-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, verweisen wir auf ein partielles Regularitätsresultat von Fuchs [F].

Im Falle konvexer Hindernisse gibt es Regularitätsresultate von Hildebrandt und Widmann [HW1]. Im Beweis wird entscheidend die Konvexität der zulässigen Menge ausgenutzt.

Eine Konvexitätsvoraussetzung an die "zulässige Zielmenge" $\mathcal{Y}$ führt jedoch in vielen Fällen nicht zu einem echten Hindernisproblem,

da die energieminimierende Abbildung dann z.B. aufgrund von Maximumprinzipien Werte im Inneren annimmt, also das Hindernis ∂Y ignoriert. Z.B. werden in einer Arbeit von Hildebrandt, Kaul und Widmann [HKW] mit den direkten Methoden der Variationsrechnung Minima des Energiefunktionals unter Dirichlet-Randbedingungen konstruiert, wobei die zulässige Menge durch eine strikt konvexe abgeschlossene geodätische Kugel $B_\rho(p)$ vom Radius ρ um p in einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit gegeben ist. Für das Bild der Dirichlet-Randdaten wurde angenommen, daß es in einer kleineren Kugel $B_{\rho'}(p)$ mit $\rho' < \rho$ enthalten ist. Unter diesen Voraussetzungen garantiert ein geeignetes Maximumprinzip [HW2], daß es sich bei den Minima um schwach harmonische Abbildungen handelt, deren Bild auch in der kleineren Kugel $B_{\rho'}(p)$ enthalten ist. Dies impliziert insbesondere, daß die Minima das Hindernis $\partial B_\rho(p)$ nicht berühren, also lokale Minima eines Variationsproblems ohne Hindernisbedingung sind. Bei allgemeinen Hindernissen kann man das natürlich nicht erwarten, wie schon das Problem der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten in einem nicht konvexem Gebiet im $\mathbb{R}^1$ zeigt. Vielmehr werden energieminimierende Abbildungen im allgemeinen am Hindernis anliegen, und uns geht es gerade darum, in einem solchen Fall Aussagen über die Regularität von u zu machen.

Die Methode die wir dazu verwenden, basiert auf einer Arbeit von Schoen und Uhlenbeck [SU1] über die partielle Regularität von energieminimierenden Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wobei die Zielmannigfaltigkeit M ohne Rand ist, also kein Hindernisproblem vorliegt. Schoen und Uhlenbeck untersuchen das Regularitätsverhalten einer lokal in $W^{1,2}(\Omega,M)$ energieminimierenden Abbildung u, deren Bild in einer kompakten Teilmenge M_o einer offenen Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^1$ enthalten ist. M_o spielt

nicht die Rolle des Hindernisses, da vorausgesetzt wird, daß u unter allen Abbildungen aus $W^{1,2}(\Omega,M)$, die mit u auf dem Rand von X übereinstimmen, die Energie minimiert. Ist M das Innere einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit Y mit nichtleerem Rand ∂Y, so verhindert die Bedingung "$u(\Omega) \subset M_o$", daß u das Hindernis ∂Y berührt. Mit relativ einfachen Überlegungen ([SU1] Lemma 2.1, [J] p 9-10) zeigt man, daß derartige Abbildungen u schwache Lösungen der Eulergleichung

$$(4) \qquad -\Delta_X u + \Pi(u)(du,du) = 0$$

sind. Dabei bezeichnet Δ_X den Laplace-Beltrami Operator auf X und Π die zweite Fundamentalform von Y in $\mathbb{R}^l$.

Will man das Vorgehen von Schoen und Uhlenbeck auf den Fall energieminimierender Abbildungen unter Hindernisbedingungen verallgemeinern, so erweist sich als erste (und Haupt-) Schwierigkeit, daß die Eulergleichung (4) dann nicht mehr zur Verfügung steht.

Im ersten Teil unserer Arbeit leiten wir deshalb ein Substitut für die Eulergleichung (4) bei lokal in $W^{1,2}(\Omega,Y)$ energieminimierenden Abbildungen u ab. Die Motivation dazu finden wir in der folgenden heuristischen Überlegung: bildet eine derartige Abbildung u eine offene Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von Ω in den Rand von Y ab, so handelt es sich bei der Einschränkung von u auf $\tilde{\Omega}$ um eine harmonische Abbildung von $\tilde{\Omega}$ in den Rand von Y und nach (4) gilt

$$(5) \qquad -\Delta_X u + S(u)(du,du) = 0 \ ,$$

wobei S die zweite Fundamentalform des Randes ∂Y in $\mathbb{R}^l$ bezeichnet. Zerlegen wir S in einen Anteil parallel zum inneren Einheitsnormalenfeld ν von ∂Y relativ zu Y und den dazu senkrechten Anteil, so erhalten wir

$$-\Delta_\chi u + \Pi(u)(du,du) + b(u)(du,du)\nu(u) = 0 \quad .$$

b ist dabei die zweite Fundamentalform des Randes ∂Y relativ zu Y. Beachten wir, daß der dritte Term dieser Gleichung nur auf der Koinzidenzmenge $u^{-1}(\partial Y) := [x \in \Omega: u(x) \in \partial Y\ ]$ erklärt ist, so liegt die Vermutung nahe, daß eine lokal in $W^{1,2}(\Omega,Y)$ energieminimierende Abbildung eine schwache (bzw. starke) Lösung der Gleichung

$$(5) \qquad -\Delta_\chi u + \Pi(u)(du,du) = H^n \llcorner \chi_{u^{-1}(\partial Y)} \chi_{[0,\infty[}(-b(u)(du,du))\nu(u)$$

ist, wobei χ_A für die charakteristische Funktion der Menge A steht. Die charakteristische Funktion $\chi_{[0,\infty[}$ findet ihre Begründung in der geometrischen Vorstellung, daß die Lösungen auf "konvexen Bereichen" des Hindernisses nicht aufliegen können, - jedenfalls nicht in der Art, daß eine Entfernung des Hindernisses ihre Form verändern würde - , da man ansonsten durch eine Variation in normaler Richtung zum Rand die Energie (Länge, Fläche) verkleinern könnte (vgl. die Theorie der skalaren Variationsgleichungen [KS]). Gleichung (5) enthält natürlich als Spezialfall die Eulergleichung (3) für harmonische Abbildungen.

Der Nachweis, daß eine lokal in $W^{1,2}(\Omega,Y)$ energieminimierende Abbildung H^n-fast überall in Ω das System (5) löst, ist eines unserer Hauptergebnisse und wird in zwei Schritten erbracht. Im ersten Schritt (§2) zeigen wir unter natürlichen Annahmen - die zweite Fundamentalform Π von Y in $\mathbb{R}^l$ sowie die Hauptkrümmungen des Randes ∂Y relativ zu Y seien beschränkt - , daß zu jeder lokal in $W^{1,2}(\Omega,Y)$ energieminimierenden Abbildung u ein eindeutiges positives bzgl. H^n absolutstetiges Radon-Maß λ auf Ω existiert, derart daß u eine schwache Lösung der Variationsgleichung

$$(6) \qquad -\Delta_\chi u + \Pi(u)(du,du) = \lambda \llcorner \nu(u)$$

ist. Für das Radon-Maß λ zeigen wir die Abschätzung

$$(7) \qquad 0 \le \lambda \le H^n \llcorner (-1)\chi_{u^{-1}(\partial Y)} b(u)(\delta u, du) \ .$$

Im zweiten Schritt §3 beweisen wir dann unter der zusätzlichen Annahme, daß es eine Lipschitz-Retraktion einer gleichmäßigen offenen Umgebung von Y in $\mathbb{R}^l$ auf Y gibt, ein partielles Regularitätsresultat für lokal in $W^{1,2}(\Omega,Y)$ energieminimierende Abbildungen. Beispiele für berandete Mannigfaltigkeiten $Y \subset \mathbb{R}^l$, die alle gemachten Voraussetzungen erfüllen, sind: kompakte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^l$ mit Rand, gewisse Graphenhindernisse, Außengebiete kompakter 1-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^l$ (vgl. auch §3). Das Hauptresultat aus §3 läßt sich dann folgendermaßen formulieren:

> Lokal in $W^{1,2}(\Omega,Y)$ energieminimierende Abbildungen sind im Inneren Ω von X bis auf eine abgeschlossene Menge mit H^{n-2}-Maß Null regulär.

Genauer zeigen wir, daß zu jeder lokal in $W^{1,2}(\Omega,Y)$ energieminimierenden Abbildung u eine offene Teilmenge $\Omega_o \subset \Omega$ existiert, auf der u von der Klasse $W^{2,p}_{loc}(\Omega_o,Y)$ für alle $1 \le p < \infty$ (also auch von der Klasse $C^{1,\alpha}(\Omega_o,Y)$ für alle $0 < \alpha < 1$) ist, und für die $H^{n-2}(\Omega \setminus \Omega_o) = 0$ gilt.

Zum Beweis dieses Regularitätssatzes bedienen wir uns der in der oben erwähnten Arbeit von Schoen und Uhlenbeck entwickelten Methode, wobei statt der Eulergleichung (4) nun die Beziehung (7) verwendet wird und die Argumentation natürlich modifiziert werden mußte, derart daß die konstruierten Vergleichsfunktionen auch der nun hinzugetretenen Hindernisbedingung genügen.

Relativ einfache Überlegungen erlauben uns dann aus dem Regulari-

tätssatz, der Variationsgleichung (6) und der Abschätzung für das Radon-Maß (7) die Gültigkeit der Gleichung (5) fast überall auf Ω für lokal energieminimierende Abbildungen abzuleiten.

Natürlich stellt sich die Frage, ob Lösungen der hier betrachteten Hindernisprobleme überhaupt Singularitäten besitzen können bzw. müssen. Da schon energieminimierende Abbildungen in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand - also bei Abwesenheit von Hindernissen- Singularitäten aufweisen können, eine Tatsache deren Entdeckung nicht geringes Erstaunen hervorrief (siehe [HKW],[H4],[J], [JK]) , muß man natürlich bei den hier behandelten Hindernisproblemen mindestens mit Singularitätenmengen derselben Komplexität wie bei den analogen Problemen ohne Hindernis rechnen. Unsere Ergebnisse zeigen, daß andererseits die Singularitäten bei Lösungen zu Hindernisproblemen für energieminimierende Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht wesentlich schlimmer sein können. Die bloße Existenz von Singularitäten bei Hindernisproblemen ist von vorneherein viel weniger überraschend als bei Problemen ohne Hindernis, da Singularitäten unter Umständen durch topologische Gegebenheiten erzwungen werden, wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

Sei $\mathcal{Y} := \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1/2\}$ und $\Omega := B_1^n(0) \subset \mathbb{R}^n$ die offene Einheitskugel. Dann liegt $u_0 := x/|x|$ in $W^{1,2}(B_1^n(0),\mathcal{Y})$ für $n \geq 3$ und mit den direkten Methoden der Variationsrechnung findet man eine energieminimierende Abbildung u_* in

$$\mathcal{C} := \{u \in W^{1,2}(B_1^n(0),\mathcal{Y}) : u - u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(B_1^n(0),\mathbb{R}^n)\} .$$

Aber u_* kann nicht stetig sein, da ansonsten $u_*/|u_*| : \overline{B_1^n(0)} \longrightarrow \partial B_1^n(0)$ eine stetige Retraktion von $B_1^n(0)$ auf $\partial B_1^n(0)$ wäre.

Ob die Singularitäten der Abbildung u im Inneren oder am Rand von $\overline{B_1^n(0)}$ liegen, läßt sich nicht einfach entscheiden. Ergebnisse von Jost und Meier [JM] und Schoen und Uhlenbeck [SU2] deuten jedoch darauf, daß in unserem Beispiel die Singularitäten im Inneren von $\overline{B_1^n(0)}$ liegen.

Meinem Lehrer Prof. Dr. Klaus Steffen möchte ich an dieser Stelle aufrichtig danken. Er gab die Anregung zu dieser Arbeit und unterstützte mich durch viele wertvolle Diskussionen.

§1. Notationen und Hilfssätze

Ist $\mathcal{L}^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$, A eine $\mathcal{L}^n$-meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $u : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-meßbar, so definieren wir für $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{p,A} = \left[\int_A |u|^p \, d\mathcal{L}^n \right]^{1/p} \tag{1.1}$$

und für $p = \infty$

$$\|u\|_{\infty,A} = \operatorname*{ess\,sup}_A |u| \, . \tag{1.2}$$

Mit $L^p(A,\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, bezeichnen wir den Banachraum der Äquivalenzklassen von Funktionen $u : A \longrightarrow \mathbb{R}^1$, für die $\|u\|_{p,A}$ endlich ausfällt.

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so bezeichnen wir mit $W^{k,p}(G,\mathbb{R}^1)$ den Teilraum von $L^p(G,\mathbb{R}^1)$, dessen Funktionen Distributionsableitungen der Ordnung $\leq k$ in L^p besitzen. Versehen wir den Raum $W^{k,p}(G,\mathbb{R}^1)$ mit der Norm

$$\|u\|_{k,p,G} = \left[\sum_{j=0}^{n} \|D^j u\|_{p,G}^p \right]^{1/p} ,$$

so erhalten wir in natürlicher Weise einen Banachraum. Unter $\overset{o}{H}{}^{k,p}(G,\mathbb{R}^1)$ wollen wir den Abschluß des Raumes $C_c^k(G,\mathbb{R}^1)$ in der $W^{k,p}$-Norm verstehen. Dabei bezeichnen wir mit $C_c^k(G,\mathbb{R}^1)$ den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$, die kompakten Träger $\operatorname{spt}\varphi$ in G besitzen. Mit $C^k(G,\mathbb{R}^1)$ seien die k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf G mit Werten im $\mathbb{R}^1$ bezeichnet. Unter dem Raum $H^{k,p}(G,\mathbb{R}^1)$ verstehen wir den Abschluß des Raumes $C^k \cap W^{k,p}(G,\mathbb{R}^1)$ in der $W^{k,p}$-Norm. Nach einem Satz von Meyers & Serrin [MS] gilt für $1 \leq p < \infty$:

$$H^{k,p}(G,\mathbb{R}^1) = W^{k,p}(G,\mathbb{R}^1) \, .$$

Für $j \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in]0,1[$ sei $C^{j,\alpha}(G,\mathbb{R}^1)$ der Raum der j-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf G, deren j-te partielle Ableitungen lokal hölderstetig zum Exponenten α sind.

Ist M eine beliebige nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^1$, so definieren wir:

$$W^{k,p}(G,M) = \left\{ u \in W^{k,p}(G,\mathbb{R}^1) : u(x) \in M \text{ für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in G \right\}.$$

Sei nun X eine kompakte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 mit Innerem Ω und nichtleerem Rand $\partial\Omega$. Der Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ besteht dann aus allen H^n-meßbaren Funktionen $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$, für die für jedes lokale Koordinatensystem $\varphi : X \supset U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0 \}$ die Abbildung $u \circ \varphi^{-1}$ in $H^{1,p}_{loc}(V,\mathbb{R}^1)$ liegt. H^n bezeichnet dabei das durch die Metrik auf Ω invariant definierte n-dimensionale Hausdorff-Maß. Durch die Norm

$$\|u\|^p_{1,p,\Omega} = \int_\Omega |u|^p \, dH^n + \int_\Omega |du|^p \, dH^n \tag{1.3}$$

wird der Raum $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ zu einem Banachraum. Dabei bezeichnet $du(x)$ das Differential von u im Punkte x und $|du(x)|^2$ die Spur der linearen Abbildung $du(x)^* \circ du(x) : T_xX \longrightarrow T_xX$ bzgl. des Riemannschen Skalarproduktes $\langle \cdot,\cdot \rangle_X$ in T_xX ($du(x)^*$ ist die zu $du(x)$ adjungierte Abbildung). Ist $\{\tau_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq n}$ ein Orthonormalsystem von T_xX, so gilt:

$$|du(x)|^2 = tr_X(du(x)^* \circ du(x)) = \sum_{\alpha=1}^n \langle du(x)^* \circ du(x)\tau_\alpha, \tau_\alpha \rangle_X$$
$$= \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha u(x) \bullet D_\alpha u(x) \quad .$$

Dabei haben wir $D_\alpha u(x)$ als Abkürzung für $du(x)\tau_\alpha$ eingeführt.
($\bullet$ bezeichnet das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^1$.)

Im Fall p=2 wird durch das Skalarprodukt

$$(u,v) = \int_\Omega u \bullet v \, dH^n + \int_\Omega tr_\chi(du^* \circ dv) \, dH^n$$

eine Hilbertraumstruktur auf $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ erklärt. Unter dem Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ verstehen wir den Abschluß des Raumes $C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^1)$ in der $W^{1,p}$-Norm, wobei $C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^1)$ den Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω bezeichnet, die kompakten Träger in Ω besitzen und Werte im $\mathbb{R}^1$ annehmen. Sei $C^1(\Omega,\mathbb{R}^1)$ der Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω. Bezeichnen wir den Abschluß von $C^1 \cap W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ in der $W^{1,p}$-Norm mit $H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1)$, so gilt für $1 \le p < \infty$:

$$H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1) = W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1).$$

Ist M eine beliebige nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^1$, so definieren wir den Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega,M)$ durch

$$W^{1,p}(\Omega,M) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1) : u(x) \in M \text{ für } H^n\text{-fast alle } x \in \Omega \right\}.$$

Bemerkung:

Ist M eine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^1$, so können wir den Raum $H^{1,p}(\Omega,M)$ als den Abschluß von $C^1(\Omega,M) \cap W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ in der $W^{1,p}$-Norm erklären. Jedoch können wir, wie ein Beispiel von Schoen & Uhlenbeck [SU2] zeigt, die Gleichheit von $H^{1,p}(\Omega,M)$ und $W^{1,p}(\Omega,M)$ nicht mehr erwarten.

Im folgenden zitieren wir eine Reihe wichtiger Eigenschaften von Funktionen aus den vorher erklärten Räumen.

Lemma1.1: (Poincaré, [M], 3.6.11, 3.2.1)

Sei $B_1(O)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und $\varphi \in C_c^\infty(B_1(O),\mathbb{R})$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $spt\varphi \subset\subset B_1(O)$ und $\int_{B_1(O)} \varphi \, d\mathcal{L}^n = 1$ fest gewählt, und der

Mittelwert von $u \in H^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^1)$ über $B_1(0)$ sei durch

$$\bar{u} := \int_{B_1(0)} u\varphi \, d\mathcal{L}^n$$

definiert. Dann gibt es eine universelle nur von n abhängige Konstante $c(n)$, derart daß für alle $u \in H^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^1)$ gilt:

$$\int_{B_1(0)} |u - \bar{u}|^2 d\mathcal{L}^n \leq c(n) \int_{B_1(0)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \, .$$

Das nachfolgende Dirichlet-Growth-Theorem ist die Grundlage einer ganzen Reihe von Regularitätsbeweisen.

Lemma 1.2: ([M], 3.5.2)
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in H^{1,2}(G, \mathbb{R}^1)$. Angenommen es gibt ein $\alpha \in]0,1[$ und eine Konstante $K > 0$, derart daß für jede Kugel $B_\rho \subset G$, $\rho > 0$, gilt:

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq K^2 \, \rho^{2\alpha} \, .$$

Dann liegt u in $C^{0,\alpha}(G, \mathbb{R}^1)$ und für jede Kugel $B_\rho \subset G$ gilt

$$\operatorname{osc}_{B_\rho} u \leq c(n,1,\alpha) K \rho^\alpha \, ,$$

wobei $\operatorname{osc}_{B_\rho}$ die Oszillation von u auf B_ρ bezeichnet.

Ein weiteres Hilfsmittel ist die folgende Campanato-Ungleichung für harmonische Funktionen.

Lemma 1.3: ([C], [Gr])
Ist $B_R \subset \mathbb{R}^n$ und $h \in H^{1,2}(B_R, \mathbb{R}^1)$ harmonisch auf B_R. Dann gilt für alle $\rho \in]0,R]$:

$$\int_{B_\rho} |Dh|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq (\rho/R)^n \int_{B_R} |Dh|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

Im zweiten Teil unserer Arbeit benötigen wir die folgende Aussage über die Verkettung von Lipschitz-Abbildungen mit $H^{1,2}$-Abbildungen.

Lemma 1.4: ([M], Kap. 3)
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante Lip(f). Dann gilt für alle $u \in H^{1,2}(G,\mathbb{R}^1)$:

(i) $f \circ u \in H^{1,2}(G,\mathbb{R}^1)$

(ii) $\|D(f\circ u)\|_{2,G} \leq \mathrm{Lip}(f)\ \|Du\|_{2,G}$

(iii) $\|f\circ u - f(0)\|_{2,G} \leq \mathrm{Lip}(f)\ \|u\|_{2,G}$.

In Paragraph 2 werden wir häufig die folgende Kettenregel für die Verkettung einer $W^{1,p}$-Abbildung mit einer C^1-Abbildung benutzen. Sei dazu X eine kompakte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Innerem Ω und nichtleerem Rand $\partial\Omega$, und M sei eine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^1$.

Lemma 1.5: ([M], Kap. 3)

(i) Ist $\rho \in C^1(M,\mathbb{R})$ mit $\|d\rho\|_{\infty,M} < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega,M)$, $1 \leq p < \infty$, so liegt $\rho\circ u$ in $H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$ und $d\rho\circ u\ du$ ist die schwache Ableitung von $d(\rho\circ u)$.

(ii) Sei N eine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, und $\varphi \in C^1(M,N)$ mit $\|d\varphi\|_{\infty,M} < \infty$. Für alle $u \in W^{1,p}(\Omega,M)$, $1 \leq p < \infty$, liegt $\varphi\circ u$ im Raum $W^{1,p}(\Omega,N)$ und $d\varphi\circ u\ du$ ist die schwache Ableitung von $d(\varphi\circ u)$.

Beweis:

Wir können o.E. annehmen, daß ρ auf dem ganzen $\mathbb{R}^1$ durch eine C^1-Funktion $\tilde{\rho}$ mit $\|D\tilde{\rho}\|_{\infty,\mathbb{R}^1} < \infty$ fortgesetzt ist. Nun approximieren wir $u \in W^{1,p}(\Omega,M)$ durch eine Folge $u_j \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^1)$, $j \in \mathbb{N}$, in der $H^{1,p}$-Norm. O.E. können wir annehmen, daß $u_j(x)$ für H^n-

fast alle $x \in \Omega$ gegen $u(x)$ konvergiert. Dann ergibt sich:

$$\int_\Omega |\tilde{\rho}(u_j) - \rho(u)|^p d\mathcal{H}^n \leq \|D\tilde{\rho}\|^p_{\infty,\mathbb{R}^1} \int_\Omega |u_j - u|^p d\mathcal{H}^n \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Beachten wir, daß nach dem Satz über dominierte Konvergenz $D\tilde{\rho}(u_j)du$ in der L^p-Norm gegen $d\rho(u)du$ konvergiert, so folgt:

$$\int_\Omega |D\tilde{\rho}(u_j)du_j - d\rho(u)du|^p d\mathcal{H}^n \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \left[\|D\tilde{\rho}\|^p_{\infty,\mathbb{R}^1} \int_\Omega |du_j - du|^p d\mathcal{H}^n + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega |D\tilde{\rho}(u_j)du - d\rho(u)du|^p d\mathcal{H}^n \right] \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Die beiden Abschätzungen implizieren insbesondere, daß $D\tilde{\rho}(u_j)du_j$ bzw. $\tilde{\rho}(u_j)$ in der L^p-Norm gegen $d\rho(u)du$ bzw. $\rho(u)$ konvergiert. Das bedeutet aber, daß $d\rho(u)du$ die schwache Ableitung von $d(\rho\circ u)$ ist. Damit ist (i) bewiesen.

Der Beweis von (ii) verläuft weitgehend analog und braucht aus diesem Grund nicht vorgeführt zu werden.

Korollar 1.6:

Sei M eine C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^1$ und X ein tangentiales C^1-Vektorfeld mit kompaktem Träger in M. Ist $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ der globale C^1-Fluß zu X auf M, so gilt für alle $\eta \in H^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ und alle $u \in W^{1,2}(\Omega,M)$:

$$\Phi\circ(\eta,u) \in W^{1,2}(\Omega,M).$$

Für $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$v_+ = \max(0,v)$$

der positive Anteil von v definiert. Die folgende Aussage für den positiven Anteil einer $H^{1,p}$-Funktion werden wir im ersten Teil unserer Arbeit gebrauchen.

Lemma 1.7: ([GT], Kap.7; [KS], Kap.II ; [M], Kap.3)
Sei $v \in H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$. Dann liegt v_+ in $H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$ und es gilt:

$$dv_+ = \begin{cases} dv & \text{auf } [v(x) > 0] \\ 0 & \text{auf } [v(x) \le 0] \end{cases} .$$

Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für den negativen Anteil $v_- = \min(0,v)$ und den Betrag einer $H^{1,p}$-Funktion v. Als letzte Eigenschaft von $H^{1,p}$-Funktionen zitieren wir eine Aussage über das Verhalten der schwachen Ableitung auf den Konstanzmengen $[v(x) = c]$.

Lemma 1.8: ([GT], Kap.7; [KS], Kap.II ; [M], Kap.3)
Sei $u \in H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$. Dann ist $du(x) = 0$ H^n-fast überall auf jeder Menge wo u konstant ist. Insbesondere ist $du(x) = 0$ H^n-fast überall auf der Menge $[u(x) = 0]$.

Als letztes Hilfsmittel benötigen wir eine einfache Konsequenz des Satzes von L. Schwartz (siehe [Fe], Kap.2.5) über die "schwache Konvergenz" von Radon-Maßen in einer speziellen Situation.

Lemma 1.9:

Sei Y ein lokalkompakter, seperabler metrischer Raum und $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Radon-Maßen auf Y. Weiter gelte:

$$\sup_j \lambda_j(Y) < \infty .$$

Dann existiert ein eindeutiges Radon-Maß λ auf Y, so daß für alle $f \in C_c^0(Y,\mathbb{R})$ gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \int_Y f \, d\lambda_j = \int_Y f \, d\lambda .$$

§2. Die Variationsgleichung

Sei X^n eine kompakte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 mit Innerem Ω und nichtleerem Rand $\partial\Omega$, und sei M^k eine k-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^l$, $l \geq 1$, mit beschränkter zweiter Fundamentalform Π. Weiter sei B ein C^2-Gebiet in M mit nichtleerem Rand $\partial B \subset M$. Als Krümmungsvoraussetzungen für den Rand von B nehmen wir an, daß die Hauptkrümmungen des Randes ∂B relativ zu M beschränkt sind. Ist ν das innere C^1-Normalenfeld von ∂B relativ zu M, so ist diese Annahme gleichbedeutend mit $\|d\nu\|_{\infty,\partial B} < \infty$.

Für Abbildungen $u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^l)$ ist das Energiefunktional

$$(2.1) \qquad E(u,\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega |du(x)|^2 dH^n = \int_\Omega e(u)(x)\,dH^n$$

definiert. In einer lokalen Parametrisierung ϕ von X besitzt die Energiedichte $e(u)$ dann die Form

$$(2.2) \qquad e(u) = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, D_\alpha(u\circ\phi)\bullet D_\beta(u\circ\phi)$$

mit

$$g_{\alpha\beta} = \langle D_\alpha\phi, D_\beta\phi\rangle_X \ , \quad (g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1} \ ,$$

und $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ bezeichnet das Riemannsche Skalarprodukt auf X. Die Norm im Sobolev-Raum $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^l)$ ist durch

$$(2.3) \qquad \|u\|^2_{1,2,\Omega} = 2\,E(u,\Omega) + \int_\Omega |u|^2 dH^n$$

gegeben. Ist $\{\tau_\alpha(x)\}_{1\leq\alpha\leq n}$ in jedem Punkt x aus Ω ein Orthonormalsystem des Tangentialraums im Punkt x, so gilt für die Energiedichte $e(u)(x)$ auch

$$e(u)(x) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} |du(x)\tau_\alpha(x)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} |D_\alpha u(x)|^2,$$

wobei wir $du(x)\tau_\alpha(x)$ durch $D_\alpha u(x)$ abgekürzt haben. Wir treffen nun die folgende

Definition 2.1:

Eine Abbildung $u \in W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$, für die für alle $v \in W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ mit $u - v \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$

$$E(u,\Omega) \leq E(v,\Omega)$$

gilt, heißt lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierend.

Mit $\overline{B}$ bezeichnen wir dabei den Abschluß von B ($\overline{B} = B \cup \partial B \subset M$). Mit den direkten Methoden der Variationsrechnung kann man den folgenden Existenzsatz beweisen.

Satz 2.2:

Zu jedem $\varphi \in W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ existiert eine Lösung des Variationsproblems

$$(1.4) \qquad E(u,\Omega) \longrightarrow \inf_{v\in C} E(v,\Omega), \quad C = \{v \in W^{1,2}(\Omega,\overline{B}) : v - \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)\}$$

Beweis:

Wegen $\varphi \in C$ ist die Klasse C nichtleer, und es gibt eine Minimalfolge $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in C mit

$$E(u_j,\Omega) \longrightarrow \inf_{v\in C} E(v,\Omega).$$

Mit der Poincaré-Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_j|^2 d\mathcal{H}^n &\leq 2\int_\Omega |u_j - \varphi|^2 d\mathcal{H}^n + 2\int_\Omega |\varphi|^2 d\mathcal{H}^n \\ &\leq c_1(n)\int_\Omega |du_j - d\varphi|^2 d\mathcal{H}^n + 2\int_\Omega |\varphi|^2 d\mathcal{H}^n \\ &\leq c_2(n)\,[\,E(u_j,\Omega) + \|\varphi\|^2_{1,2,\Omega}\,],\end{aligned}$$

d.h. $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge in $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$. Diese besitzt eine schwach konvergente Teilfolge $u_{j'} \underset{j'\to\infty}{\longrightarrow} u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$

Nach dem Satz von Rellich können wir (evtl. nach erneuter Teilfolgenauswahl) o.E. annehmen, daß $u_{j'}(x)$ für H^n-fast alle $x \in \Omega$ gegen $u(x)$ konvergiert. Beachten wir, daß $\overline{B}$ abgeschlossen ist, so ergibt sich $u \in W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$. Aus der Unterhalbstetigkeit des Energiefunktionals bzgl. schwacher $H^{1,2}$-Konvergenz folgt nun:

$$E(u,\Omega) \leq \liminf_{j' \to \infty} E(u_{j'},\Omega),$$

und u ist das gesuchte Minimum.

Wir bemerken, daß die Minima des Variationsproblems (1.4) natürlich auch lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierende Abbildungen sind. Im nun folgenden wollen wir für derartige Abbildungen eine Variationsgleichung ableiten. Eine der Hauptschwierigkeiten dabei besteht in der Konstruktion geeigneter Variationen, die die Hindernisbedingung respektieren.

Zunächst bemerken wir, daß es auf Grund der Voraussetzungen an das Gebiet B und seinen Rand ∂B eine C^2-Funktion $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\rho = 0$ auf ∂B, $\rho > 0$ auf B, $\rho < 0$ auf $M \setminus \overline{B}$ und $\nabla^M \rho \neq 0$ auf ∂B gibt. $\nabla^M \rho(x)$ bezeichnet dabei den Vektor, der die lineare Abbildung $d\rho(x)$ bzgl. des Skalarproduktes in $T_x M$ darstellt, d.h. für alle $\tau \in T_x M$ gilt:

$$\nabla^M \rho(x) \bullet \tau = d\rho(x)\tau.$$

Für einen Randpunkt $x \in \partial B$ gilt: $\nabla^M \rho(x) \in T_x M \cap \mathrm{Nor}_x \partial B$, und $\nabla^M \rho(x)$ weist in B hinein. $\mathrm{Nor}_x \partial B$ ist dabei der Normalraum an ∂B im Punkt x.

Sei X ein tangentiales C^1-Vektorfeld auf M mit spt $X \subset\subset M$, und sei $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ der zu X global existierende Fluß. Es gilt nun das folgende, aus der Theorie der gewöhnlichen Differential-

gleichungen wohlbekannte

Lemma 2.3: ([A], Kap. IV, Thm. 16.9)
Ist das C^1-Vektorfeld X nirgends auf dem Rand von B nach außen gerichtet, d.h. es gilt

$$X(x) \bullet \nabla^M \rho(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \partial B,$$

so ist $\overline{B}$ positiv invariant unter dem Fluß Φ, d.h. für alle $x \in \overline{B}$ und $t \geq 0$ liegt $\Phi(t,x)$ in $\overline{B}$.

Bemerkung:
1.) Gilt $X(x) \bullet \nabla^M \rho(x) = 0$ für alle x aus ∂B, d.h. X ist tangential an ∂B, so ist $\overline{B}$ natürlich auch negativ invariant unter Φ.
2.) Wir bemerken, daß $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ und $\frac{\partial}{\partial t} d\Phi$ auch dann existieren und stetig sind, wenn X nur von der Klasse C^1 ist. Für die reinen Zeitableitungen des Flusses Φ finden wir

$$\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \|_{\infty, \Gamma_\infty} + \| \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \|_{\infty, \Gamma_\infty} < \infty ,$$

wobei $\Gamma_\infty := \mathbb{R} \times M$ ist, und für die gemischte zweite Ableitung des Flusses

$$\| \frac{\partial}{\partial t} d\Phi \|_{\infty, \Gamma_T} < \infty \quad \forall\, T > 0 ,$$

mit $\Gamma_T := [-T, T] \times M$.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Herleitung einer Variationsgleichung für lokal energieminimierende Abbildungen ist das folgende

Variationslemma 2.4:
Sei X ein tangentiales C^1-Vektorfeld auf M mit spt $X \subset\subset M$ und Φ der globale Fluß zu X. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega, \overline{B})$. Dann gilt:

(i) **Für alle** $\eta \in H^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ **ist durch**

$$v_s(x) := \Phi(s\eta(x),u(x))$$

eine stetig differenzierbare Kurve in $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^l)$ definiert. Es gilt

$$v_o = u, \quad \frac{d}{ds}|_{s=0}\, v_s = \eta X \circ u ,$$

und

$$\frac{d}{ds}|_{s=0}\, E(v_s,\Omega) = \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta X \circ u)\, dH^n . \tag{2.5}$$

(ii) Ist $\eta \in \overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ [bzw. spt $\eta \subset\subset \Omega$], so ist $v_s - u \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^l)$ [bzw. hat kompakten Träger in Ω] für alle s [unabhängig von s].

(iii) Ist X tangential an ∂B, also $X \bullet \nabla^M \rho = 0$ auf ∂B, so liegt v_s für alle $s \in \mathbb{R}$ in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$, und die erste Variation des Energiefunktionals (1.5) verschwindet, wenn u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$ energieminimierend ist.

(iv) Ist X nirgends auf ∂B nach außen gerichtet, d.h. es gilt $X \bullet \nabla^M \rho \geq 0$ auf ∂B, und $\eta \geq 0$ auf Ω, so liegt v_s für alle $s \geq 0$ in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$, und die erste Variation des Energiefunktionals (1.5) ist nicht negativ, wenn u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$ energieminimierend ist.

Beweis zu (i):

Aus der Kettenregel (Kor. 1.6) ergibt sich unmittelbar, daß v_s für alle $s \in \mathbb{R}$ in $W^{1,2}(\Omega,M)$ liegt. Beachten wir nun, daß für H^n-fast alle $x \in \Omega$ durch $s \longmapsto v_s(x)$ eine differenzierbare Kurve in M erklärt ist, so finden wir:

$$\frac{d}{ds}\, v_s(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,(\, s\eta(x),u(x)\,)\,\eta(x) . \tag{2.6}$$

Daraus folgt leicht die Abschätzung

$$\left|\frac{d}{ds}\, v_s(x)\right| \le \left\|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\|_{\infty,\Gamma_\infty} |\eta(x)| \in L^2(\Omega,\mathbb{R}).$$

Der Differenzenquotient $\frac{1}{\varepsilon}\,(\, v_{s+\varepsilon}(x) - v_s(x)\,)$ ist dann vermöge

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\,(\, v_{s+\varepsilon}(x) - v_s(x)\,)\right| \le \left\|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\|_{\infty,\Gamma_\infty} |\eta(x)| \in L^2(\Omega,\mathbb{R})$$

durch eine L^2-Funktion dominiert. Da er H^n-fast überall punktweise gegen $\frac{d}{ds}\, v_s$ konvergiert, erhalten wir nach dem Satz über dominierte Konvergenz

$$(2.7) \qquad \frac{1}{\varepsilon}\,(\, v_{s+\varepsilon} - v_s\,) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2} \frac{d}{ds}\, v_s = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,(\, s\eta, u)\,\eta\,.$$

Mit der Kettenregel für $H^{1,2}$-Abbildungen (Lemma 1.5) ergibt sich nun, daß durch

$$s \longmapsto D_\alpha v_s(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,(\, s\eta(x), u(x))\, s\, D_\alpha \eta(x) + d\Phi\,(\, s\eta(x), u(x))\, D_\alpha u(x)$$

für H^n-fast alle $x \in \Omega$ eine differenzierbare Kurve gegeben ist. Differentiation nach s liefert uns

$$\frac{d}{ds}\, D_\alpha v_s(x) = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\,(\, s\eta(x), u(x))\, s\eta(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,(\, s\eta(x), u(x))\right] D_\alpha \eta(x) + d\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,(\, s\eta(x), u(x))\,\eta(x)\, D_\alpha u(x)\,.$$

Setzen wir $\bar{s} = |s|\, \|\eta\|_{\infty,\Omega}$, so ergibt sich daraus die Abschätzung:

$$\left|\frac{d}{ds}\, D_\alpha v_s(x)\right| \le \left[\, |s|\, \left\|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right\|_{\infty,\Gamma_\infty} \|\eta\|_{\infty,\Omega} + \left\|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\|_{\infty,\Gamma_\infty}\right] |D_\alpha \eta(x)| + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\, d\Phi\right\|_{\infty,\Gamma_{\bar{s}}} \|\eta\|_{\infty,\Omega}\, |D_\alpha u(x)|\,.$$

Für festes $s_o \in \mathbb{R}$ können wir auf jeder Umgebung $[s_o - T, s_o + T]$ mit $T > 0$ die Ableitung $\frac{d}{ds}\, D_\alpha v_s$ für $s \in [s_o - T, s_o + T]$ unabhängig von s

mit $\bar{T} := T\|\eta\|_{\infty,\Omega}$ wie folgt abschätzen:

$$|\frac{d}{ds} D_\alpha v_s(x)| \leq \Big[(|s_0| + T) \|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\|_{\infty,\Gamma_\infty} \|\eta\|_{\infty,\Omega} + \|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\|_{\infty,\Gamma_\infty} \Big] |D_\alpha \eta(x)| + \|\frac{\partial}{\partial t} d\Phi\|_{\infty,\Gamma_{\bar{s}_0+\bar{T}}} \|\eta\|_{\infty,\Omega} |D_\alpha u(x)| .$$

Diese Abschätzung impliziert sofort, daß der Differenzenquotient $\frac{1}{\varepsilon}(D_\alpha v_{s_0+\varepsilon} - D_\alpha v_{s_0})$ durch eine L^2-Funktion unabhängig von ε dominiert ist. Da er H^n-fast überall punktweise gegen $\frac{d}{ds}|_{s=s_0} D_\alpha v_s$ konvergiert, folgt nach dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\frac{1}{\varepsilon}(D_\alpha v_{s_0+\varepsilon} - D_\alpha v_s) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2} \frac{d}{ds}|_{s=s_0} D_\alpha v_s .$$

Beachten wir, daß s_0 beliebig war, so folgt zusammen mit (2.7) sofort, daß $s \longmapsto v_s$ eine stetig differenzierbare Kurve in $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ ist. Wegen $\Phi(0,\cdot) = id_M$, ist $v_0 = u$. Aus (2.6) ergibt sich mit Hilfe der Flußgleichung für Φ

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} v_s = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,u)\,\eta = \eta X \circ u .$$

Beachten wir, daß $E(\cdot,\Omega)$ von der Bilinearform $Q(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{tr}_X(du^* \circ dv)\,dH^n$ vermöge $E(u,\Omega) = Q(u,u)$ erzeugt wird, so finden wir leicht

$$E'(u,\Omega)v = 2\,Q(u,v) = \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha v \; dH^n .$$

Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} E(v_s,\Omega) = E'(u,\Omega)\frac{d}{ds}|_{s=0} v_s = \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta X \circ u)\,dH^n .$$

Beweis zu (ii):

Sei zunächst spt $\eta \subset\subset \Omega$ angenommen. Dann gilt $v_s(x) = u(x)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \Omega$ mit $\eta(x) = 0$, was bedeutet, daß spt $(v_s - u) \subset\subset \Omega$. Ist $\eta \in \overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, so approximieren wir

η in der $H^{1,2}$-Norm durch Funktionen η_j aus $C_c^1(\Omega,\mathbb{R})$. O.E. können wir zusätzlich annehmen, daß für H^n-fast alle $x \in \Omega$ $\eta_j(x)$ gegen $\eta(x)$ konvergiert und $\|\eta_j\|_{\infty,\Omega} \le 2\|\eta\|_{\infty,\Omega}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Sei nun $s \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann gilt für H^n-fast alle $x \in \Omega$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(s\eta_j(x),u(x)) - \Phi(s\eta(x),u(x))| \le \\
&\le \int_0^1 \left|\frac{d}{dr}\,\Phi(s(r\eta_j(x) + (1-r)\eta(x)),u(x))\right| dr \\
&\le \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\|_{\infty,\Gamma_\infty} |s|\,|\eta_j(x) - \eta(x)| \ ,
\end{aligned}
$$

aus der wir leicht

$$
\|\Phi(s\eta_j,u) - v_s\|_{2,\Omega} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \tag{2.8}
$$

entnehmen. Mit der Kettenregel für $W^{1,2}$-Abbildungen ergibt sich für H^n-fast alle $x \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
&|D_\alpha\Phi(s\eta_j(x),u(x)) - D_\alpha\Phi(s\eta(x),u(x))| \le \\
&\le \int_0^1 \left|\frac{d}{dr}\,D_\alpha\Phi(s(r\eta_j(x) + (1-r)\eta(x)),u(x))\right| dr \\
&\le \left\|\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right\|_{\infty,\Gamma_\infty} s^2\,(|D_\alpha\eta_j(x)| + |D_\alpha\eta(x)|)\,|\eta_j(x) - \eta(x)| + \\
&+ \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\|_{\infty,\Gamma_\infty} |s|\,|D_\alpha\eta_j(x) - D_\alpha\eta(x)| + \\
&+ \left\|\frac{\partial}{\partial t}D\Phi\right\|_{\infty,\Gamma_{\tilde{s}}} |s|\,|\eta_j(x) - \eta(x)|\,|D_\alpha u(x)| \ ,
\end{aligned}
$$

wobei wir $\tilde{s} := 3|s|\|\eta\|_{\infty,\Omega} \ge |s(r\eta_j(x) + (1-r)\eta(x))|$ für den letzten Term benutzt haben. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz und der L^2-Konvergenz von $D_\alpha\eta_j$ gegen $D_\alpha\eta$ ergibt sich

$$
\|D_\alpha\Phi(s\eta_j,u) - D_\alpha v_s\|_{2,\Omega} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \ ,
$$

und zusammen mit (2.8) folgt

(2.9) $$\Phi(s\eta_j,u) \xrightarrow[j\to\infty]{H^{1,2}} v_s \ .$$

Beachten wir noch, daß nach dem zuerst Gezeigten $u - \Phi(s\eta_j,u)$ kompakten Träger in Ω besitzt, so finden wir wegen der $H^{1,2}$-Konvergenz aus (2.9), daß $v_s - u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$ gilt.

Beweis zu (iii):

Ist X tangential an ∂B, so ist $\overline{B}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ invariant unter dem Fluß Φ und die durch $v_s(x) = \Phi(s\eta_j(x),u(x))$ definierte Kurve respektiert für H^n-fast alle $x \in \Omega$ und alle $s \in \mathbb{R}$ die Hindernisbedingung, d.h. es gilt $v_s(x) \in \overline{B}$. Nach (i) ist $s \longmapsto v_s$ eine stetig differenzierbare Kurve in $H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^1)$. Ist nun u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierend, so gilt für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$

$$0 \le \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(E(v_\varepsilon,\Omega) - E(u,\Omega) \right) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} E(v_\varepsilon,\Omega) =$$

$$= \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta X \circ u) \ dH^n$$

und

$$0 \ge \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(E(v_\varepsilon,\Omega) - E(u,\Omega) \right) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} E(v_\varepsilon,\Omega) =$$

$$= \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta X \circ u) \ dH^n \ .$$

Zusammen ergeben diese beiden Ungleichungen die Behauptung (iii).

Beweis zu (iv):

Ist X nirgends auf ∂B nach außen gerichtet, so ist $\overline{B}$ positiv invariant unter dem Fluß Φ. Für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}_+)$ respektiert die durch $v_s(x) = \Phi(s\eta(x),u(x))$ definierte Kurve für H^n-fast alle $x \in \Omega$ und alle $s \ge 0$ die Hindernisbedigung. Analog zu (iii) erhalten wir für lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierende Abbildungen $u \in W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$

$$0 \le \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(E(v_\varepsilon, \Omega) - E(u, \Omega) \right) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon = 0} E(v_\varepsilon, \Omega) =$$

$$= \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha (\eta X \circ u) \, d\mathcal{H}^n \, .$$

Bemerkung:

Die von uns im Variationslemma angegebenen Variationen sind in der Lage "doppelte Blätter" der lokal energieminimierenden Abbildung unterschiedlich zu variieren. Dies geschieht durch eine geeignete Wahl der freien Funktion η.

Wir formulieren nun eine erste Anwendung des Variationslemmas für am Rand des Hindernisses normale C^1-Vektorfelder N (N=ν auf ∂B

Satz 2.5:

Sei u lokal in $W^{1,2}(\Omega, \overline{B})$ energieminimierend, und seien die Hauptkrümmungen von ∂B relativ zu M beschränkt. Dann gilt:

(i) Es existiert ein positives Radon-Maß λ auf Ω, derart daß für alle $\eta \in \overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha (\eta N \circ u) \, d\mathcal{H}^n = \int_\Omega \eta \, d\lambda \, .$$

(ii) λ ist unabhängig von der Wahl von N, sofern N = ν auf ∂B ist.

(iii) Es gilt

$$0 \le \lambda \le \mathcal{H}^n \llcorner \chi_{u^{-1}(\partial B)} (-1) \, b \circ u \, (D_\alpha u, D_\alpha u) \, ,$$

wobei b die zweite Fundamentalform von ∂B relativ zu M ist. Insbesondere ist λ absolutstetig bzgl. $\mathcal{H}^n$, $\lambda ([u(x) \in B]) = 0$ und $(-1) \, b \circ u \, (D_\alpha u, D_\alpha u) \ge 0$ auf der Kontaktmenge $u^{-1}(\partial B) = [u(x) \in \partial B]$.

Bemerkung:

Die zweite Fundamentalform von ∂B relativ zu M in $y \in \partial B$ ist durch

$$b(y)(\tau,\tilde{\tau}) := -\tau \bullet (d\nu(y)\tilde{\tau}) \qquad \forall\, \tau,\tilde{\tau} \in T_y(\partial B)$$

gegeben, wobei ν das Einheitsnormalenfeld von ∂B relativ zu M ist. Die Beschränktheit der relativen Hauptkrümmungen von ∂B ist dann gleichbedeutend mit der Beschränktheit von $d\nu$.

Beweis:

Zunächst nehmen wir an, daß $\bar{B}$ kompakt ist. O.E. ist in diesem Fall die Annahme gerechtfertigt, daß N kompakten Träger in M besitzt. (Dazu multiplizieren wir N gegebenenfalls mit einer geeigneten Abschneidefunktion.) Beachten wir nun, daß für alle $y \in \partial B$ gilt

$$N(y) \bullet \nabla^M \rho(y) = |\nabla^M \rho(y)| > 0 \ ,$$

so erhalten wir nach Anwendung des Variationslemmas, die für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$ gültige Ungleichung

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta N \circ u)\ d\mathcal{H}^n \geq 0 \ .$$

Mit dem Satz von L. Schwartz finden wir auf Ω ein positives Radon-Maß λ mit der Eigenschaft, daß für alle $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta N \circ u)\ d\mathcal{H}^n = \int_\Omega \eta\ d\lambda \tag{2.10}$$

gilt. Ist nun $\tilde{N}$ ein zweites C^1-Vektorfeld auf M mit $\tilde{N} = \nu$ auf ∂B, so finden wir mit dem gleichen Argument wie oben ein positives Radon-Maß $\tilde{\lambda}$ auf Ω, derart daß (2.10) mit $\tilde{N}$ und $\tilde{\lambda}$ gilt. Zusammen mit (2.10) ergibt sich daraus für alle $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta(N \circ u - \tilde{N} \circ u))\ d\mathcal{H}^n = \int_\Omega \eta\ d\lambda - \int_\Omega \eta\ d\tilde{\lambda} \tag{2.11}$$

Wegen $(N - \tilde{N})_{|\partial B} = 0$ folgt mit dem Variationslemma ($N - \tilde{N}$ ist tangential an ∂B) für alle $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha (\eta (N \circ u - \tilde{N} \circ u))\ d\mathcal{H}^n = 0 \ ,$$

und mit (2.11) ergibt sich daraus

$$\int_\Omega \eta\ d\lambda = \int_\Omega \eta\ d\tilde{\lambda} \qquad \forall\ \ \eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+) \ .$$

Diese Gleichung impliziert unmittelbar $\lambda = \tilde{\lambda}$, und die Behauptung (ii) ist für kompaktes $\overline{B}$ bewiesen.

Zum Beweis von (iii) wählen wir nun $s > 0$ so klein, daß dort wo $|\rho(y)| < s$ ist, $|\nabla^M \rho(y)| > 0$ ist. Sei $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit den folgenden Eigenschaften

$$(2.12) \qquad \begin{cases} \vartheta(t) = 1 & \text{für } t \le \frac{1}{2} \\ \vartheta(t) = 0 & \text{für } t \ge 1 \\ \vartheta'(t) \le 0 & \text{für alle } t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Für $\tau > 0$ setzen wir $\vartheta_\tau(t) := \vartheta(t/\tau)$. Ist nun $0 < \tau < s$, so wird durch

$$N_\tau := \vartheta_\tau \circ \rho\ \frac{\nabla^M \rho}{|\nabla^M \rho|} = \vartheta_\tau \circ \rho\ N \quad \text{mit} \quad N := \frac{\nabla^M \rho}{|\nabla^M \rho|}$$

eine C^1-Fortsetzung von ν definiert. Aus

$$D_\alpha (\eta N_\tau \circ u) = N_\tau \circ u\ D_\alpha \eta + [\,|\nabla^M \rho| \circ u\ \vartheta_\tau' \circ \rho \circ u\ (N \circ u \bullet D_\alpha u)\ N \circ u +$$

$$+ \vartheta_\tau \circ \rho \circ u\ (dN \circ u\ D_\alpha u)\,]\,\eta$$

und (2.10) ergibt sich für alle $0 < \tau < s$ und $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$

$$(2.13) \qquad \int_\Omega \eta\ d\lambda = \int_\Omega D_\alpha u \bullet N_\tau \circ u\ D_\alpha \eta\ d\mathcal{H}^n +$$

$$+ \int_\Omega \eta\, |\nabla^M \rho| \circ u\ \vartheta_\tau' \circ \rho \circ u \sum_{\alpha=1}^{n} |N \circ u \bullet D_\alpha u|^2\ d\mathcal{H}^n +$$

$$+ \int_\Omega \eta \; \vartheta_\tau \circ \rho \circ u \; D_\alpha u \bullet (dN \circ u \; D_\alpha u) \; dH^n$$

$$=: (1)_\tau + (2)_\tau + (3)_\tau \; .$$

Beachten wir, daß die linke Seite von (2.13) nach dem zuerst Bewiesenen unabhängig von τ ist, so können wir auf der rechten Seite τ von oben gegen Null streben lassen. Wegen $\vartheta_\tau' \leq 0$, ist $(2)_\tau \leq 0$ für alle $0 < \tau < s$. Der Definition von $\vartheta_\tau(t)$ entnehmen wir, daß für $\tau \searrow 0$ die Funktion $\vartheta_\tau(t)$ punktweise gegen die charakteristische Funktion $\chi_{]-\infty,0]}(t)$ konvergiert, also gilt

$$\vartheta_\tau(\rho(u(x))) \xrightarrow[\tau \searrow 0]{} \begin{cases} 0 & \text{falls } u(x) \in B \quad (\; [x : \rho(u(x)) > 0] \;) \\ 1 & \text{falls } u(x) \in \partial B \; (\; [x : \rho(u(x)) = 0] \;) \end{cases}$$

$$=: \chi_{u^{-1}(\partial B)}(x) \; .$$

Dabei haben wir $\{x \in \Omega : \rho(u(x)) = 0\}$ durch $u^{-1}(\partial B)$ abgekürzt. Mit

$$|D_\alpha u \bullet N_\tau \circ u \; D_\alpha \eta| \leq c_1 \; |du| \, |d\eta| \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$$

und

$$|D_\alpha u \bullet (dN \circ u \; D_\alpha u) \; \vartheta_\tau \circ \rho \circ u \; \eta| \leq c_2 \; |du|^2 \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$$

und dem Satz über dominierte Konvergenz folgt für $(1)_\tau$ und $(2)_\tau$

$$(1)_\tau \xrightarrow[\tau \searrow 0]{} \int_{u^{-1}(\partial B)} D_\alpha u \bullet \nu \circ u \; D_\alpha \eta \; dH^n$$

$$(2)_\tau \xrightarrow[\tau \searrow 0]{} \int_{u^{-1}(\partial B)} \eta \; D_\alpha u \bullet (dN \circ u \; D_\alpha u) \; dH^n \; .$$

Nach Lemma 1.8, Kap.1, und der Kettenregel für $W^{1,2}$-Abbildungen (Lemma 1.5, Kap.1) ergibt sich für H^n-fast alle $x \in u^{-1}(\partial B)$

$$0 = D_\alpha \rho(u(x)) = \nabla^M \rho(u(x)) \bullet D_\alpha u(x) \; .$$

Dies bedeutet nun, daß $D_\alpha u$ für H^n-fast alle $x \in u^{-1}(\partial B)$ tangential an ∂B ist, und für alle positiven $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$ gilt

$$\int_{u^{-1}(\partial B)} D_\alpha u \bullet v \circ u \; D_\alpha \eta \; dH^n = 0$$

und

$$\int_{u^{-1}(\partial B)} \eta D_\alpha u \bullet (d N \circ u \; D_\alpha u) dH^n = \int_{u^{-1}(\partial B)} \eta D_\alpha u \bullet (d \nu \circ u \; D_\alpha u) dH^n .$$

Setzen wir alles zusammen, so ergibt sich für das Radon-Maß λ die Abschätzung

$$(2.14) \qquad \int_\Omega \eta \; d\lambda \le \int_{u^{-1}(\partial B)} \eta (-1) \; b \circ u (D_\alpha u, D_\alpha u) \; dH^n \qquad \forall \; \eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$$

Zum Beweis von (iii) genügt es, da λ und H^n Radon-Maße sind, die Abschätzung nur für alle offenen Teilmengen von Ω zu zeigen. Zu einer offenen Teilmenge $\mathcal{O} \subset \Omega$ wählen wir eine Folge $\{\eta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$-Funktionen, die punktweise und monoton wachsend gegen die charakteristische Funktion $\chi_{\mathcal{O}}$ konvergiert. Mit dem Satz über monotone Konvergenz folgt dann unmittelbar

$$(2.15) \qquad \lambda(\mathcal{O}) \le \int_{u^{-1}(\partial B) \cap \mathcal{O}} (-1) \; b \circ u (D_\alpha u, D_\alpha u) \; dH^n ,$$

und λ besitzt die in (iii) behaupteten Eigenschaften. Uns verbleibt noch zu zeigen, daß die Variationsgleichung (2.9) für alle $\eta \in \overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ gilt. Dazu approximieren wir zunächst $\eta \in \overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L (\Omega, \mathbb{R}_+)$ durch eine Folge $\eta_j \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$ in der $H^{1,2}$-Norm, für die wir zusätzlich o.E. noch $\|\eta_j\|_{\infty,\Omega} \le 2\|\eta\|_{\infty,\Omega}$ und $\eta_j(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} \eta(x)$ für H^n-fast alle $x \in \Omega$ annehmen. Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt dann nach (2.10)

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha (\eta_j \circ u) \; dH^n = \int_\Omega \eta_j \; d\lambda ,$$

und für die linke Seite ergibt sich mit dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha (\eta_j \circ u) \; dH^n \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha (\eta \circ u) \; dH^n .$$

Mit

$$\lambda(\Omega) \leq \|d\nu\|_{\infty,\partial B} \int_{\Omega} |du|^2 \, dH^n$$

und der Absolutstetigkeit von λ bzgl. H^n ergibt sich nach dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\int_{\Omega} \eta_j \, d\lambda \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_{\Omega} \eta \, d\lambda \, ,$$

und die Variationsgleichung (2.10) gilt für alle positiven $\overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ Funktionen. Ist $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ beliebig, so zerlegen wir η in seinen positiven und negativen Anteil $\eta = \eta_+ + \eta_-$ und beachten, daß nach Lemma 1.7, Kap.1, η_+ und η_- in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R}_+)$ liegen.

Im nun folgenden zweiten Teil des Beweises werden wir die Annahme, daß $\overline{B}$ kompakt ist, eliminieren. Dazu wählen wir zunächst eine Folge $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_j \in C_c^1(\mathbb{R}^1,\mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften

$$\text{spt } \varphi_j \subset\subset \mathbb{R}^1 \, , \; \varphi_{j+1} = 1 \text{ auf spt } \varphi_j \, , \; |\nabla\varphi_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$
$$\text{gleichmäßig auf dem } \mathbb{R}^1 \, , \; 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots \uparrow \chi_{\mathbb{R}^1} \, .$$

Ist N eine C^1-Fortsetzung des Normalenfeldes ν an ∂B, so gibt es nach dem ersten Teil des Beweises zu dem C^1-Vektorfeld $\varphi_j|_M \, N$ ein positives Radon-Maß λ_j, das nicht von der Fortsetzung von ν abhängt, derart daß für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ gilt

$$(2.16) \qquad \int_{\Omega} D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta\varphi_j \circ u \, N \circ u) \, dH^n = \int_{\Omega} \eta \, d\lambda_j \, .$$

Für die Radon-Maße λ_j ergibt sich

$$(2.17) \qquad 0 \leq \lambda_j \leq H^n \llcorner \chi_u^{-1}(\partial B) \; (-1) \; \varphi_j \circ u \; b \circ u \; (D_\alpha u, D_\alpha u) \leq$$

$$\leq \mathcal{H}^n \llcorner \chi_u^{-1}(\partial B)\ (-1)\ b\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u)$$

$$\leq \|d\nu\|_{\infty,\partial B}\mathcal{H}^n \llcorner\ |du|^2\ ,$$

woraus leicht

$$\sup_j \lambda_j(\Omega) \leq \|d\nu\|_{\infty,\partial B} \int_\Omega |du|^2\ d\mathcal{H}^n < \infty$$

folgt. Beachten wir, daß $\eta(\varphi_{j+1}\varphi_j)\circ u = \eta\varphi_j \circ u$ gilt, so finden wir für alle positiven $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$

$$\int_\Omega \eta\ d\lambda_j = \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta\varphi_j \circ u\ N\circ u)\ d\mathcal{H}^n =$$

$$= \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta\varphi_j\circ u\ \varphi_{j+1}\circ u\ N\circ u)\ d\mathcal{H}^n =$$

$$= \int_\Omega \eta\varphi_j \circ u\ d\lambda_{j+1} \leq$$

$$\leq \int_\Omega \eta\ d\lambda_{j+1}\ .$$

Dies bedeutet aber, daß die Folge der Radon-Maße $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ monoton wächst. Wenden wir Lemma 1.9, Kap.1, auf diese Folge an, so finden wir ein (eindeutiges) positives Radon-Maß λ auf Ω, derart daß für alle $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \eta\ d\lambda_j = \int_\Omega \eta\ d\lambda\ . \tag{2.18}$$

Nach (2.17) gilt für λ die Abschätzung

$$0 \leq \lambda \leq \mathcal{H}^n \llcorner\ \chi_u^{-1}(\partial B)\ (-1)\ b\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u)\ , \tag{2.19}$$

der wir entnehmen, daß λ absolutstetig bzgl. $\mathcal{H}^n$ ist und der Träger von λ in der Kontaktmenge $u^{-1}(\partial B)$ enthalten ist. Sind N und dN auf $\overline{B}$ beschränkt (was wir o.E. annehmen können, da $d\nu$ auf ∂B beschränkt ist), so folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz für alle $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta \circ N \circ u)\ \varphi_j \circ u\ dH^n \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta \circ N \circ u)\ dH^n\ ,$$

und mit der gleichmäßigen Konvergenz von $|\nabla\varphi_j|$ gegen Null ergibt sich

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet (\eta \circ N \circ u)\ \nabla\varphi_j \circ u \bullet D_\alpha u\ dH^n \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\ .$$

Mit der Kettenregel für $W^{1,2}$-Abbildungen folgt daraus für die linke Seite von (2.16) beim Grenzübergang $j \to \infty$

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta \circ \varphi_j \circ u \circ N \circ u)\ dH^n \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta \circ N \circ u)\ dH^n\ . \tag{2.20}$$

Verbinden wir dies mit (2.18), so erhalten wir die für alle $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$ gültige Gleichung

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta \circ N \circ u)\ dH^n = \int_\Omega \eta\ d\lambda\ . \tag{2.21}$$

Mit demselben Approximationsargument wie im Falle kompakten $\bar{B}$'s zeigen wir, daß (2.21) für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ gilt. Uns verbleibt nur noch der Nachweis, daß das Radon-Maß λ unabhängig von der Fortsetzung des Normalenfeldes ν an ∂B ist. Sei $\tilde{N}$ eine weitere C^1-Fortsetzung von ν, so existiert ein positives Radon-Maß $\tilde{\lambda}$, derart daß für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ die Gleichung (2.21) mit $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{N}$ gilt. Daraus ergibt sich leicht

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta(N \circ u - \tilde{N} \circ u))\ dH^n = \int_\Omega \eta\ d\lambda - \int_\Omega \eta\ d\tilde{\lambda}\ .$$

Setzen wir in diese Gleichung die Testfunktion $\varphi = \zeta\varphi_j \circ u$ mit $\zeta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ ein, so erhalten wir

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\zeta\varphi_j \circ u(N \circ u - \tilde{N} \circ u))\ dH^n = \int_\Omega \zeta\varphi_j \circ u\ d\lambda - \int_\Omega \zeta\varphi_j \circ u\ d\tilde{\lambda}. \tag{2.22}$$

Da das Vektorfeld $\varphi_{j|M}(N - \tilde{N})$ auf dem Rand von B identisch Null ist, verschwindet die linke Seite von(2.22) nach dem Variationslemma, und es gilt

$$\int_{\Omega} \zeta\varphi_j \circ u \, d\lambda = \int_{\Omega} \zeta\varphi_j \circ u \, d\tilde{\lambda} \qquad \forall\, j \in \mathbb{N},\ \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}) .$$

Bei $j \to \infty$ ergibt sich daraus die Gleichung

$$\int_{\Omega} \zeta \, d\lambda = \int_{\Omega} \zeta \, d\tilde{\lambda} \qquad \forall\, \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}) ,$$

der wir unmittelbar die Behauptung $\lambda = \tilde{\lambda}$ entnehmen.

Bemerkung:

Aus Satz 2.5, (iii), folgt leicht

$$0 \le \lambda \le \|d\nu\|_{\infty,\partial B} \; H^n \llcorner \chi_u^{-1}(\partial B) \; |du|^2 ,$$

und nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es eine H^n-meßbare Funktion $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit spt $\theta \subset u^{-1}(\partial B)$ und $0 \le \theta \le \|d\nu\|_{\infty,\partial B} |du|^2$ für H^n-fast alle $x \in u^{-1}(\partial B)$, so daß gilt

$$\lambda = H^n \llcorner \theta \quad (\lambda(\tilde{\Omega}) = \int_{\tilde{\Omega}} \theta \, dH^n \text{ für alle } H^n\text{-meßbaren } \tilde{\Omega} \subset \Omega).$$

Die vollständige Identifikation des Radon-Maßes λ bzw. der Funktion θ ist an dieser Stelle noch nicht möglich, da wir dazu höhere Regularität der lokal in $W^{1,2}(\Omega, \overline{B})$ energieminimierenden Abbildung u benötigen.

Wir kommen nun zu einer zweiten Anwendung des Variationslemmas. Sei dazu N eine C^1-Fortsetzung des Einheitsnormalenfeldes ν an ∂B.

Satz 2.6: (Tangentiale Variationsgleichung)
Sei $u \in W^{1,2}(\Omega, \overline{B})$ lokal energieminimierend und $\|d\nu\|_{\infty,\partial B} < \infty$. Weiter sei λ das zu u gehörende Radon-Maß nach Satz 2.5. Dann erfüllt u für alle tangentialen Vektorfelder $Y \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^1)$ längs u die Variationsgleichung

$$\int_{\Omega} D_\alpha u \bullet D_\alpha Y \, dH^n = \int_{u^{-1}(\partial B)} Y \bullet \nu \circ u \, d\lambda \quad .$$

Beweis:

Zunächst betrachten wir nur tangentiale Vektorfelder Y längs u, für die $Y(x) = 0$ ist, falls $u(x)$ außerhalb einer kompakten Menge $\bar{B} \cap K$ liegt. K sei dabei eine feste kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^1$. Um jeden Punkt $y \in \bar{B}$ gibt es eine offene Menge $U \subset M$, die eine der beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

(2.23) Ist $y \in \partial B$, so gibt es $(k-1)$ C^1-Vektorfelder $X_1, \ldots, X_{k-1}$ mit kompaktem Träger in M, die das Normalenfeld N in jedem Punkt $y \in U$ zu einem orthogonalen k-Bein des Tangentialraumes $T_y M$ ergänzen, und die längs ∂B tangential an ∂B sind. ("Randkarte")

(2.24) Ist $y \in B$, so gibt es k C^1-Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k$ mit kompaktem Träger in B, die in jedem Punkt aus U ein orthonormales k-Bein des Tangentialraumes an M bilden. ("Innere Karte")

Wegen der Kompaktheit von $\bar{B} \cap K$ finden wir eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{1 \le i \le p}$, derart daß für jede der offenen Mengen U_i, $1 \le i \le p$, entweder (2.23) oder (2.24) gilt. Zu dieser offenen Überdeckung wählen wir nun eine C^1-Zerlegung der Eins, etwa $\{\zeta_i\}_{1 \le i \le p}$, und sehen, daß es genügt

$$\int_\Omega D_\alpha u \cdot D_\alpha (\zeta_i \circ u\, Y)\, d\mathcal{H}^n = \int_{u^{-1}(\partial B)} \zeta_i \circ u\, Y \cdot \nu \circ u\, d\lambda$$

zu zeigen. Allgemeiner reicht es aus die Variationsgleichung für an M tangentiale Vektorfelder Y zu beweisen, für die $Y(x) = 0$ ist, wenn $u(x)$ außerhalb einer offenen Menge U liegt, die entweder (2.23) oder (2.24) erfüllt.

Sei nun U eine innere Karte, dann schreiben wir

$$(2.25) \qquad \Psi = \sum_{j=1}^{k} \eta_j \, X_j \circ u$$

mit $\eta_j \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Beachten wir, daß spt $X_j \subset\subset B$ gilt, so finden wir mit dem Variationslemma (iii) die Gleichungen

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta_j \, X_j \circ u) \, dH^n = 0 = \int_{u^{-1}(\partial B)} \eta_j \, X_j \circ u \bullet \nu \circ u \, d\lambda \, ,$$

$1 \le j \le k$, aus denen sich in diesem Fall mit der Zerlegung (2.25) von Ψ die Variationsgleichung ergibt. Ist U eine Randkarte, so zerlegen wir Ψ durch

$$(2.26) \qquad \Psi = \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j \, X_j \circ u + \eta_k \, N \circ u$$

mit $\eta_j \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $1 \le j \le k$. Für $1 \le j \le k-1$ wenden wir das Variationslemma (iii) auf die Vektorfelder X_j an (X_j ist tangential an ∂B längs ∂B) und erhalten

$$(2.27) \qquad \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta_j \, X_j \circ u) \, dH^n = 0 = \int_{u^{-1}(\partial B)} \eta_j \, X_j \circ u \bullet \nu \circ u \, d\lambda \, ,$$

$1 \le j \le k-1$. Für den Normalenanteil ergibt sich mit Satz 2.5 und $\eta_k(x) = \Psi(x) \bullet \nu(u(x))$ für H^n-fast alle $x \in u^{-1}(\partial B)$ sofort

$$\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha(\eta_k \, N \circ u) \, dH^n = \int_{u^{-1}(\partial B)} \eta_k \, d\lambda = \int_{u^{-1}(\partial B)} \Psi \bullet \nu \circ u \, d\lambda \, .$$

Zusammen mit (2.27) und der Zerlegung von Ψ aus (2.26) folgt daraus die behauptete Variationsgleichung für eine Randkarte.

Nun werden wir die Annahme, daß das tangentiale Vektorfeld längs u dann Null ist, wenn u(x) außerhalb der kompakten Menge $\overline{B} \cap K$ liegt, eliminieren. Sei also $\Psi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^1)$. Wie im Beweis von Satz 2.5 wählen wir eine aufsteigende Folge von Funktionen $\varphi_j \in C_c^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}_+)$, $j \in \mathbb{N}$, mit $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots \uparrow \chi_{\mathbb{R}^1}$ und $|\nabla \varphi_j| \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf dem $\mathbb{R}^1$. Beachten wir, daß $\varphi_j(u(x)) \, \Psi(x) = 0$ ist, wenn u(x) außerhalb von $\overline{B} \cap$ spt φ_j liegt,

und daß $\varphi_j \circ u \, Y$ ein tangentiales Vektorfeld längs u aus dem Raum $\overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^1)$ ist, so finden wir mit dem zuerst Bewiesenen die Gleichungen

$$(2.28) \qquad \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha (\varphi_j \circ u \, Y) \, dH^n = \int_{u^{-1}(\partial B)} \varphi_j \circ u \, Y \bullet \nu \circ u \, d\lambda \, ,$$

$j \in \mathbb{N}$. Wenden wir den Satz über dominierte Konvergenz auf die rechte Seite von (2.28) an (dies ist möglich, da λ absolutstetig bzgl. H^n ist und eine endliche Gesamtmasse besitzt und $\varphi_j(u(x))$ H^n-fast überall gegen 1 konvergiert), so erhalten wir

$$(2.29) \qquad \lim_{j \to \infty} \int_{u^{-1}(\partial B)} \varphi_j \circ u \, Y \bullet \nu \circ u \, d\lambda = \int_{u^{-1}(\partial B)} Y \bullet \nu \circ u \, d\lambda \, .$$

Mit der Kettenregel für $W^{1,2}$-Abbildungen (Lemma 1.5, Kap.1), dem Satz über dominierte Konvergenz und der gleichmäßigen Konvergenz von $|\nabla \varphi_j| \longrightarrow 0$, ergibt sich für die linke Seite von (2.28)

$$(2.30) \qquad \lim_{j \to \infty} \left[\int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha Y \, \varphi_j \circ u \, dH^n + \int_\Omega D_\alpha u \bullet Y \, \nabla \varphi_j \circ u \bullet D_\alpha u \, dH^n \right] =$$

$$= \int_\Omega D_\alpha u \bullet D_\alpha Y \, dH^n \, .$$

Zusammen mit (2.29) folgt daraus die behauptete Variationsgleichung für tangentiale Vektorfelder längs u.

Bevor wir eine einfache Anwendung der tangentialen Variationsgleichung angeben, erinnern wir uns an einige Begriffe aus der Differentialgeometrie. Die zweite Fundamentalform Π im Punkt $y \in M$ ist die symmetrische Bilinearform

$$\Pi_y : T_y M \times T_y M \longrightarrow T_y M^\perp := \mathrm{Nor}_y \, M$$

mit

$$\Pi_y(\tau, \tilde{\tau}) = - \sum_{i=1}^{l-k} (\tilde{\tau} \bullet D_\tau \nu^i) \nu^i \big|_y \qquad \forall \, \tau, \tilde{\tau} \in T_y M \, .$$

Dabei sind $\nu^1,\ldots,\nu^{1-k}$ lokal bei y definierte Vektorfelder mit $\nu^i(z)\bullet\nu^j(z) = \delta_{ij}$ und $\nu^i(z) \in T_zM^\perp$ für alle z einer offenen Umgebung von y in M. $D_\tau\nu|_y$ bezeichnet die Richtungsableitung des Vektorfeldes ν in Richtung τ im Punkt y. Mit P_y bezeichnen wir die Tangetialprojektion von $\mathbb{R}^1$ auf T_yM, und beachten, daß $M \ni y \longmapsto P_y$ von der Klasse C^1 ist. Zwischen P und der zweiten Fundamentalform Π bestehen die Beziehungen

$$(D_\tau P)\tilde{\tau}|_y = \Pi_y(\tau,\tilde{\tau}) \qquad \forall\ \tau,\tilde{\tau} \in T_yM$$

und

$$(2.31) \qquad \tilde{\tau}\bullet(D_\tau P)\psi|_y = \psi\bullet\Pi_y(\tau,\tilde{\tau}) \qquad \forall\ \tau,\tilde{\tau} \in T_yM,\ \psi \in \mathbb{R}^1 .$$

Wir kommen nun zu der angekündigten Anwendung von Satz 2.6.

Satz 2.7: (Allgemeine Variationsgleichung)
Seien die Hauptkrümmungen von ∂B relativ zu M und die zweite Fundamentalform Π von M in $\mathbb{R}^1$ beschränkt. Weiter sei u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$ energieminimierend und λ das nach Satz 2.6 zu u gehörende Radon-Maß. Dann erfüllt u für alle $\Psi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^1)$ die Variationsgleichung

$$(2.32) \qquad \int_\Omega [D_\alpha u\bullet D_\alpha\Psi + \Psi\bullet\Pi\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u)]\,d\mathcal{H}^n = \int_{u^{-1}(\partial B)} \Psi\bullet\nu\circ u\,d\lambda .$$

Beweis:
Wir wählen eine aufsteigende Folge von Funktionen $\varphi_j \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}_+)$, $j \in \mathbb{N}$, mit $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots. \uparrow \chi_{\mathbb{R}^1}$ und $|\nabla\varphi_j| \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf dem $\mathbb{R}^1$, und beachten, daß für $\Psi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^1)$ durch $\Psi_j = \varphi_j\circ u\ P_u\Psi$ für alle $j \in \mathbb{N}$ ein tangentiales Vektorfeld längs u erklärt ist, das Null ist, wenn u(x) außerhalb von spt $\varphi_j \cap M$ liegt. Nach der Kettenregel für $W^{1,2}$-Abbildungen liegt $(\varphi_{j|M}\ P)\circ u$ im Raum $H^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{1^2})$. Dies impliziert sofort, daß

$(\varphi_{j|M^P})\circ u\ Y$ in $\overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^1)$ liegt. Mit der Variationsgleichung für tangentiale Vektorfelder längs u und unter Beachtung der Identität (2.31) für P ergibt sich

$$(2.32)\qquad \int_{u^{-1}(\partial B)} \varphi_j\circ u\ Y\bullet \nu\circ u\, d\lambda = \int_\Omega D_\alpha u\bullet D_\alpha(\varphi_j\circ u\ P_u Y)\ dH^n$$

$$= \int_\Omega (D_\alpha u\bullet D_\alpha Y + Y\bullet \Pi\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u))\ \varphi_j\circ u\ dH^n +$$

$$+ \int_\Omega (D_\alpha u\bullet Y)\ (D_\alpha u\bullet(\nabla\varphi_j)\circ u)\ dH^n.$$

Die linke Seite und den letzten Summand der rechten Seite behandeln wir analog zu (2.29) und (2.30), und erhalten

$$\lim_{j\to\infty} \int_{u^{-1}(\partial B)} \varphi_j\circ u\ Y\bullet \nu\circ u\, d\lambda = \int_{u^{-1}(\partial B)} Y\bullet \nu\circ u\, d\lambda$$

und

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega (D_\alpha u\bullet Y)\ (D_\alpha u\bullet(\nabla\varphi_j)\circ u)\ dH^n = 0\ .$$

Auf den ersten Summanden der rechten Seite von (2.32) wenden wir den Satz über dominierte Konvergenz an (dies ist möglich, da $\|\Pi\|_{\infty,\overline{B}} < \infty$ ist und $\varphi_j(u(x))$ H^n-fast überall gegen 1 konvergiert), und erhalten

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega (D_\alpha u\bullet D_\alpha Y + Y\bullet \Pi\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u))\ \varphi_j\circ u\ dH^n =$$

$$= \int_\Omega (D_\alpha u\bullet D_\alpha Y + Y\bullet \Pi\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u))\ dH^n\ .$$

Bemerkung:

Für C^2-Abbildungen $v : \Omega \longrightarrow M$ definieren wir den Euler-Operator $\mathcal{E}$ durch

$$(2.33)\qquad \mathcal{E}(v) := -\Delta_X v + \mathrm{tr}_X(v^*\Pi) = -\Delta_X v + \Pi\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u)\,.$$

Dabei ist $-\Delta_X$ der innere Laplace-Beltrami Operator auf X, und $\mathrm{tr}_X(v^*\Pi)$ ist die Spur (bzgl. der Riemannschen Metrik auf X)

der auf X mit v zurücktransportierten zweiten Fundamentalform Π von M. Die allgemeine Variationsgleichung für lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierende Abbildungen u besagt dann nichts anderes, als daß im Distributionssinn für u die Gleichung

$$\mathcal{E}(u) = \lambda \llcorner v \circ u = H^n \llcorner (\theta \circ v \circ u) \quad . \tag{2.34}$$

gilt, wobei λ das nach Satz 2.5 zu u gehörende Radon-Maß ist. (Für die Definition von θ sei auf die Bemerkung am Ende des Beweises von Satz 2.5 verwiesen.) In lokalen Koordinaten ϕ auf X gilt dann

$$-\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha}\right) + g^{\alpha\beta}\, \Pi \circ \tilde{u} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\beta}\right) = L^n \llcorner (\tilde{\theta} \circ v \circ \tilde{u}), \tag{2.35}$$

wobei wir $\tilde{u} := u \circ \phi$ und $\tilde{\theta} := \theta \circ \phi$ definiert haben.

Wir kommen nun zu der angekündigten Identifikation des Radon-Maßes λ bzw. der H^n-meßbaren Funktion θ. Die Idee dazu ist die folgende: Liegt u in $W^{2,1}_{loc}(\Omega,\overline{B})$, so gelten (2.34) bzw. (2.35) punktweise fast überall, und durch zweimalige Differentiation der Funktion $\rho \circ u$ auf der Koinzidenzmenge $u^{-1}(\partial B) = [u(x) \in \partial B]$ erhalten wir eine Gleichung, die es uns ermöglicht das Radon-Maß λ vollständig durch die Geometrie und u zu charakterisieren.

An dieser Stelle benötigen wir ein Regularitätsergebnis für lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierende Abbildungen. Unter den zusätzlichen Annahmen, daß X von der Klasse C^3 ist und daß es eine Lipschitz-Retraktion einer gleichmäßigen offenen Umgebung von $\overline{B}$ in $\mathbb{R}^1$ auf $\overline{B}$ gibt, zeigen wir in Kapitel 3 den folgenden

Regularitätssatz 2.8:

Für jede lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierende Abbildung u gibt es eine offene Menge $\Omega_o \subset \Omega$, auf der u von der Klasse $W^{2,p}_{loc}(\Omega_o,\mathbb{R}^l)$ für alle $1 \le p < \infty$ (und damit auch von der Klasse $C^{1,\alpha}(\Omega_o,\mathbb{R}^l)$ für alle $0 < \alpha < 1$) ist, und für die gilt

$$\Omega \setminus \Omega_o = \{ x \in \Omega : \liminf_{\rho \downarrow 0} \rho^{2-n} E(u, B_\rho(x)) > 0 \}$$

und

$$H^{n-2}(\Omega \setminus \Omega_o) = 0 .$$

Mit H^{n-2} bezeichnen wir dabei das durch die Metrik auf Ω invariant definierte (n-2)-dimensionale Hausdorff-Maß, und $B_\rho(x)$ ist die geodätische Kugel vom Radius ρ um x in X.

Wie wir dem Regularitätssatz entnehmen, ist die Menge der singulären Punkte eine H^n-Nullmenge und spielt, da wir im folgenden nur Aussagen H^n-fast überall machen wollen, keine Rolle mehr. Für H^n-fast alle $x \in u^{-1}(\partial B)$ gilt $\rho(u(x)) = 0$ bzw. in lokalen Koordinaten ϕ auf X haben wir für L^n-fast alle $x \in \tilde{u}^{-1}(\partial B)$ die Gleichung $\rho(\tilde{u}(x)) = 0$. Wenden wir nun Lemma 1.8 auf $\rho \circ \tilde{u}$ und $\tilde{u}^{-1}(\partial B)$ an, so erhalten wir L^n-fast überall auf $\tilde{u}^{-1}(\partial B)$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho \circ \tilde{u}) = (\nabla^M \rho) \circ \tilde{u} \bullet \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha} .$$

Ist N eine C^1-Fortsetzung des Einheitsnormalenfeldes ν an ∂B auf M, so ergibt sich daraus

$$0 = N \circ \tilde{u} \bullet \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha} \qquad L^n\text{-fast überall auf } \tilde{u}^{-1}(\partial B).$$

Wenden wir nun Lemma 1.8 auf $N \circ \tilde{u} \bullet \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha}$ und $\tilde{u}^{-1}(\partial B)$ an, so finden wir mit (2.35) L^n-fast überall auf $\tilde{u}^{-1}(\partial B)$

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha} \bullet N\circ\tilde{u}) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha})\bullet \nu\circ\tilde{u} - g^{\alpha\beta}\ (dN\circ\tilde{u}\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\beta})\bullet \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha} =$$

$$= \tilde{\theta} - g^{\alpha\beta}\ (d\nu\circ\tilde{u}\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\beta})\bullet \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha}$$

$$= \tilde{\theta} + g^{\alpha\beta}\ b\circ\tilde{u}\,(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^\beta})\ .$$

Dies impliziert, daß H^n-fast überall auf $u^{-1}(\partial B)$ gilt

$$(2.36) \qquad \theta = -\, b\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u) \geq 0\ .$$

Somit ist das zu u gehörende Radon-Maß vollständig durch u und die Geometrie des Hindernisses bestimmt, und es gilt das folgende

Korollar 2.9:

Ist u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$ energieminimierend, so gilt H^n- fast überall auf Ω

$$\mathcal{E}(u) = H^n \llcorner \chi_u^{-1}(\partial B)\ \chi_{]0,\infty]}(-b\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u))\ \nu\circ u\ .$$

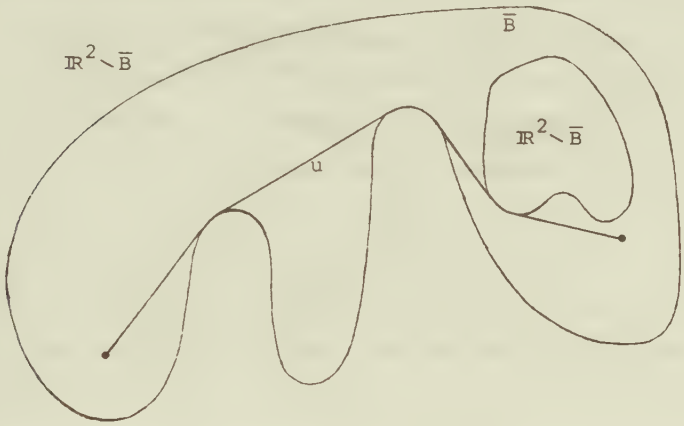
Speziell ist H^n-fast überall auf $u^{-1}(\partial B)$

$$(2.37) \qquad -b\circ u\,(D_\alpha u, D_\alpha u) = \mathrm{tr}_\chi(u^* b) \geq 0\ .$$

Bemerkung:

Die Ungleichung (2.37) spiegelt in gewisser Hinsicht unsere geometrische Vorstellung wieder, daß energieminimierende Abbildungen (dazu denke man etwa an die kürzeste Verbindung zweier Punkte oder an parametrische Minimalflächen) auf "konvexen Bereichen" des Hindernisses nicht aufliegen können. Liegt eine energieminimierende Abbildung auf einem "konvexen Bereich" des Hindernisses auf, so können wir durch eine Variation in normaler Richtung zum Hindernis die Energie

(Länge, Flächeninhalt) verkleinern. An hand eines Bildes für einen einfachen Spezialfall (kürzeste Verbindung zweier Punkte in einem glatten Gebiet im $\mathbb{R}^2$) illustrieren wir diese geometrische Vorstellung.



Für die spezielle Situation, daß Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist, wollen wir die allgemeine Variationsgleichung separat formulieren

Korollar 2.10:

Seien $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}), 1 \le \alpha, \beta \le n$, die Koeffizienten einer gleichmäßig elliptischen Matrix auf Ω, d.h. es gilt mit einer positiven Konstanten $\varkappa > 0$

$$a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \ge \varkappa|\xi|^2 \qquad \forall\, x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Minimiert $u : \Omega \longrightarrow \bar{B}$ das Funktional

$$F(v,\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega a^{\alpha\beta}\,\frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial v}{\partial x^\beta}\; d\mathcal{L}^n$$

lokal in der Klasse $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$, so existiert ein (eindeutiges) positives Radon-Maß μ auf Ω, für das gilt

$$0 \le \mu \le \mathcal{L}^n \llcorner \chi_u^{-1}(\partial B)\,(-1)\; a^{\alpha\beta}\; b \circ u\,\Big(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta}\Big)\Big) \;.$$

Die lokal das Funktional F-minimierende Abbildung u erfüllt für alle $\Psi \in \overset{o}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^1)$ die Variationsgleichung

$$\int_\Omega a^{\alpha\beta}\,\Big(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \bullet \frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta} + \Psi \bullet \Pi \circ u\,\Big(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta}\Big)\Big)\, d\mathcal{L}^n =$$

$$= \int_{u^{-1}(\partial B)} \Psi \bullet \nu \circ u \, d\mu \;.$$

§3. Partielle Regularität

In diesem Kapitel wenden wir uns dem Regularitätsproblem lokal energieminimierender Abbildungen zu. Zu diesem Zweck formulieren wir vorab die von uns benötigten Voraussetzungen. X^n sei eine kompakte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse C^3 mit Innerem Ω und nichtleerem Rand $\partial\Omega$, und M^k sei eine k-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^l$, $1 \leq k \leq l$, mit beschränkter zweiter Fundamentalform Π. B sei ein C^2-Gebiet in M mit nichtleerem Rand $\partial B \subset M$ und der zusätzlichen Eigenschaft, daß es eine Lipschitz-Retraktion R einer gleichmäßigen offenen Umgebung $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^l$ von $\overline{B}$ auf $\overline{B}$ gibt. Weiter nehmen wir an, daß die Hauptkrümmungen des Randes ∂B relativ zu M beschränkt sind.

Unter den oben gemachten Voraussetzungen werden wir in diesem Kapitel für lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierende Abbildungen partielle Regularität beweisen. Zu diesem Zweck bedienen wir uns einer von Schoen & Uhlenbeck [SU1] entwickelten Methode.

Beginnen werden wir jedoch mit einigen Beispielen von Hindernissen, die unsere oben gemachten Voraussetzungen erfüllen.

Beispiel 1:
Sei $M = \mathbb{R}^l$ und B ein beschränktes C^2-Gebiet. Für den C^2-Rand ∂B ist dann aus der Differentialgeometrie wohlbekannt, daß es eine gleichmäßige offene Umgebung $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^l$ von ∂B gibt, auf der die nächste Punktprojektion $p : \mathcal{O} \longrightarrow \partial\overline{B}$ von der Klasse C^1 ist. Setzen wir dann

$$R(x) = \begin{cases} p(x) & x \in (\mathbb{R}^l \setminus \overline{B}) \cap \mathcal{O} \\ x & x \in \overline{B} \end{cases},$$

so haben wir die Lipschitz-Retraktion gefunden. Die anderen Voraussetzungen sind trivial erfüllt.

Beisiel 2:

Sei $M = \mathbb{R}^1$ und B das Außengebiet eines beschränkten C^2-Gebietes.

Beispiel 3:

Sei $M = \mathbb{R}^1$ und $B = \{(x',x^1) \in \mathbb{R}^1 : x^1 > f(x')\}$ ein Graphenhindernis mit einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^{1-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

$$\|\nabla f\|_{\infty,\mathbb{R}^{1-1}} + \|D^2 f\|_{\infty,\mathbb{R}^{1-1}} < \infty .$$

Die Beschränktheit der ersten Ableitung von f impliziert, daß es eine Lipschitz-Retraktion von $\mathbb{R}^1$ auf $\overline{B}$ gibt. Aus der Beschränktheit der zweiten Ableitung folgt leicht die der zweiten Fundamentalform von $\partial B = \{(x',f(x') : x' \in \mathbb{R}^{1-1}\}$.

Beispiel 4:

Sei M eine C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ und sei B ein C^2-Gebiet in M mit kompaktem Abschluß $\overline{B}$ in M. Die Hauptkrümmungen des Randes relativ zu M sind wegen der Kompaktheit des Randes ∂B beschränkt. Die Existenz einer gleichmäßigen offenen Umgebung $\mathcal{O}$ von $\overline{B}$ in $\mathbb{R}^1$, auf der es eine Lipschitz-Retraktion $R : \mathcal{O} \longrightarrow \overline{B}$ gibt, sehen wir wie folgt ein.

Beweis:

Zunächst existieren nach [Fe],3.1.20, eine offene Umgebung $\mathcal{V}$ von M in $\mathbb{R}^1$ und eine C^2-Retraktion $p_M : \mathcal{V} \longrightarrow M$ von $\mathcal{V}$ auf M und eine offene Umgebung $\mathcal{W}$ in $\mathbb{R}^1$ von ∂B, die wir wegen der Kompaktheit von ∂B gleichmäßig wählen können, und eine C^2-Retraktion $p_{\partial B} : \mathcal{W} \longrightarrow \partial B$ von $\mathcal{W}$ auf ∂B. Nun setzen wir

$$\tilde{p}_{\partial B} = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{auf } \overline{B} \\ p_{\partial B} & \text{auf } (M \cap \mathcal{W}) \setminus \overline{B} . \end{cases}$$

Indem wir V evtl. verkleinern, erreichen wir, daß das Bild von V unter p_M in $\overline{B} \cup (M \cap W)$ enthalten ist. Dann ist durch

$$R := \tilde{p}_{\partial B} \circ p_M : V \longrightarrow \overline{B}$$

die gesuchte Lipschitz-Retraktion gegeben.

Nun wenden wir uns dem Regularitätsproblem für lokal in $W^{1,2}(\Omega, \overline{B})$ energieminimierende Abbildungen zu. Vorab erinnern wir uns kurz an die Definition der Energie einer $H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^1)$ Abbildung

$$E(u,\Omega) = \frac{1}{2} \int_\Omega |du|^2 \, dH^n = \int_\Omega e(u) \, dH^n \quad . \tag{3.1}$$

In einer lokalen Parametrisierung ϕ besitzt die Energiedichte $e(u)$ die Form

$$e(u) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} D_\alpha(u \circ \phi) \cdot D_\beta(u \circ \phi) \tag{3.2}$$

mit

$$g_{\alpha\beta} = \langle D_\alpha \phi, D_\beta \phi \rangle_X \ , \ (g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1} \ , \ g = \det(g_{\alpha\beta}) \ . \tag{3.3}$$

Ist nun $a \in \Omega$ und $B_\rho(a)$ die geodätische Kugel vom Radius ρ um a, so können wir $B_\rho(a)$ durch Riemannsche Normalkoordinaten

$$\phi(x) = \mathrm{Exp}_a(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \ , \ |x| < \rho$$

parametrisieren. Dabei haben wir $T_a X$ durch eine lineare Isometrie mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert. In dieser Parametrisierung ist $g_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$ und $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(0) = 0$, wobei $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ die Christoffelsymbole zweiter Art sind, und es gilt

$$\begin{aligned} E(u, B_\rho(a)) &= \frac{1}{2} \int_{B_\rho(0)} g^{\alpha\beta} \, D_\alpha(u \circ \phi) \cdot D_\beta(u \circ \phi) \, \sqrt{g} \, d\mathcal{L}^n \\ &= \frac{1}{2} \, \rho^{n-2} \int_{B_1(0)} g_\rho^{\alpha\beta} \, D_\alpha w \cdot D_\beta w \, \sqrt{g_\rho} \, d\mathcal{L}^n \ , \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei wir

(3.5) $\quad g_\rho(y) := g(\rho y),\ w(y) := u(\mathrm{Exp}_a(\rho y))$

definiert haben. Zu einem gegebenem $\Lambda > 0$ gibt es einen Radius $0 < R = R(a,\Lambda)$ der geodätischen Kugel um a , derart daß für alle $x \in B_R(0)$ gilt

(3.6) $$\sum_{\alpha\beta\gamma} \left|\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x)\right| \le \Lambda \ .$$

Für $0 < \sigma \le 1$ ergibt sich daraus

(3.7) $$\sum_{\alpha\beta\gamma} \left|\frac{\partial g_{\alpha\beta}(\sigma y)}{\partial y^\gamma}\right| = \sigma \sum_{\alpha\beta\gamma} \left|\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(\sigma y)\right| \le \sigma\Lambda \quad \forall\ |y| \le R \ .$$

Als nützlich erweist sich fogende

Definition 3.1:

Sei $\Lambda > 0$. Mit F_Λ bezeichnen wir die Klasse der Funktionale der folgenden Gestalt

$$w \longmapsto I(w,q) := \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} q^{\alpha\beta}\ D_\alpha w \bullet D_\beta w\ \sqrt{q}\ d\mathcal{L}^n \ ,$$

wobei $q_{\alpha\beta}$ eine C^1-Metrik auf der abgeschlossenen Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet, für die gilt

$$q_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta} \ , \quad \sum_{\alpha\beta\gamma} \left|\frac{\partial q_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x)\right| \le \Lambda \quad \forall\ |x| \le 1 \ .$$

Zu gegebenem $\Lambda > 0$ liegt für $0 < \rho \le R(a,\Lambda)$ das Funktional $I(\cdot, g_\rho)$ mit $g_\rho(x) = g(\rho x)$ in F_Λ und $w(x) = u(\mathrm{Exp}_a(\rho x))$ minimiert das Funktional $I(\cdot, g_\rho)$ lokal in $W^{1,2}(B_1(0), \bar{B})$, falls u eine lokal in $W^{1,2}(\Omega, \bar{B})$ energieminimierende Abbildung ist, d.h.für alle $v \in W^{1,2}(B_1(0), \bar{B})$ mit $v - w \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^1)$ gilt

$$I(w, g_\rho) \le I(v, g_\rho) .$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich für (3.4)

$$I(w, g_\rho) = \rho^{2-n} E(u, \mathcal{B}_\rho(a)) \ .$$

Beachten wir, daß der zu Λ und $a \in \Omega$ gehörende Radius $R(a,\Lambda)$ in stetiger Weise vom Punkt a abhängt, so finden wir leicht das folgende

Lemma 3.2:

Sei u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierend. Zu $\Lambda > 0$ und $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ gibt es eine positive Konstante $R(\widetilde{\Omega},\Lambda) > 0$, derart daß für alle $a \in \widetilde{\Omega}$ und $0 < \rho \leq R$ die Abbildung $w(x) = u(\mathrm{Exp}_a(\rho x))$ das Funktional $I(\cdot,g_\rho) \in F_\Lambda$ lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ minimiert, und für $0 < \sigma \leq 1$ gilt $I(\cdot,g_{\sigma\rho}) \in F_{\sigma\Lambda}$.

Da Regularitätsaussagen im Definitionsbereich Ω lokaler Art sind, genügt es alle Aussagen für geodätische Kugeln mit kleinem Radius zu zeigen, und nach Lemma 3.2 können wir uns sogar auf das Studium lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ I-minimierender Abbildungen mit $I \in F_\Lambda$ und kleinem Λ beschränken.

Ist nun q die euklidische Standardmetrik auf $B_1(0)$, so schreiben wir E anstatt I, und falls keine Verwechselung möglich ist wollen wir $I(\cdot,q)$ einfach durch $I(\cdot)$ abkürzen. Weiter vereinbaren wir

$$E_{x,\rho}(u) := \frac{1}{2} \int_{B_\rho(x)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

und

$$I_{x,\rho}(u) := \frac{1}{2} \int_{B_\rho(x)} q^{\alpha\beta} \, D_\alpha u \bullet D_\beta u \, \sqrt{q} \, d\mathcal{L}^n \, .$$

Lemma 3.3:

Es gibt Konstanten $c_1(n) > 0$ und $\Lambda_1(n) > 0$ mit der Eigenschaft, daß für jede lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ I-minimierende Abbildung u mit $I \in F_\Lambda$ und $0 < \Lambda \leq \Lambda_1$ und für alle $0 < \rho \leq 1$ und w aus $W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ mit $u = w$ auf $B_1(0) \setminus B_\rho(0)$ gilt

$$E_{o,\rho}(u) \leq (1 + c_1(n)\rho\Lambda) E_{o,\rho}(w) \quad .$$

Beweis:

Für alle $v \in H^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^1)$ gilt

$$\begin{aligned} |E_{o,\rho}(v) - I_{o,\rho}(v)| &\leq \frac{1}{2} \int_{B_\rho(0)} |Dv|^2 |1 - \sqrt{q}| \, d\mathcal{L}^n + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{B_\rho(0)} |\delta^{\alpha\beta} - q^{\alpha\beta}| \, |D_\alpha v| \, |D_\beta v| \sqrt{q} \, d\mathcal{L}^n \leq \\ &\leq c_2(n)\rho\Lambda E_{o,\rho}(v) \quad , \end{aligned}$$

sofern nur Λ hinreichend klein ist, d.h. $0 \leq \Lambda \leq \Lambda_1(n)$ (Beachte dazu die Definition des Funktionals $I \in F_\Lambda$). Indem wir $\Lambda_1(n)$ evtl. verkleinern, ergeben sich daraus die Abschätzungen

$$\begin{aligned} I_{o,\rho}(v) &\leq (1 + c_2(n)\Lambda\rho) E_{o,\rho}(v) \\ E_{o,\rho}(v) &\leq (1 + c_3(n)\Lambda\rho) I_{o,\rho}(v) \quad , \end{aligned} \tag{3.8}$$

aus denen zusammen mit der Minimalität von u leicht die Behauptung folgt.

Für den Regularitätsbeweis von großer Bedeutung ist die nun folgende

Monotonieformel 3.4:

Es gibt Konstanten $\Lambda_1(n) > 0$ und $c_4(n) < \infty$ mit der Eigenschaft, daß für jede lokal in $W^{1,2}(B_1(0), \overline{B})$ I-minimierende Abbildung u mit $I \in F_\Lambda$, $0 < \Lambda \leq \Lambda_1(n)$, die folgende Monotonieformel für alle $0 < \rho \leq r < 1$ gilt:

$$E_{o,\rho}(u) \leq c_4(n) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-2} E_{o,r}(u)$$

Beweis:

O.B.d.A. sei $n \geq 3$ angenommen. Die reelle Funktion

$$]0,1[\ni \sigma \longmapsto E_{0,\sigma}(u) = \frac{1}{2} \int_{B_\sigma(0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

ist bzgl. $\mathcal{L}^1$ absolutstetig, und daher gibt es eine $\mathcal{L}^1$-Nullmenge $N \subset]0,1[$ außerhalb der $E_{0,\sigma}(u)$ nach σ differenzierbar ist, und für die Ableitung gilt

$$\frac{d}{d\sigma} E_{0,\sigma}(u) = \frac{1}{2} \int_{|x|=\sigma} |Du|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \qquad \forall \ \sigma \in]0,1[\setminus N \ .$$

Sei nun σ ein "guter Radius", d.h. $\sigma \in]0,1[\setminus N$, so ist die durch

$$u_\sigma(x) := \begin{cases} u(\sigma \frac{x}{|x|}) & |x| \le \sigma \\ u(x) & |x| \ge \sigma \end{cases} \in W^{1,2}(B_1(0), \overline{B})$$

definierte Abbildung eine zulässige Vergleichsabbildung für unsere lokal in $W^{1,2}(B_1(0), \overline{B})$ I- minimierende Abbildung u. Zusammen mit

$$E_{0,\sigma}(u_\sigma) = \frac{\sigma}{n-2} \left[\frac{d}{d\sigma} E_{0,\sigma}(u) - \frac{1}{2} \int_{|x|=\sigma} |Du \frac{x}{|x|}|^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right]$$

ergibt sich für $0 < \Lambda \le \Lambda_1(n)$ (Λ_1 ist die Konstante aus Lemma 3.3) nach Anwendung von Lemma 3.3

$$E_{0,\sigma}(u) \le (1 + c_1(n)\Lambda\sigma) E_{0,\sigma}(u_\sigma) =$$

$$\le \frac{\sigma}{n-2}(1 + c_1(n)\Lambda\sigma) \left[\frac{d}{d\sigma} E_{0,\sigma}(u) - \frac{1}{2} \int_{|x|=\sigma} |Du \frac{x}{|x|}|^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right] .$$

Daraus folgt

$$0 \le \frac{1}{2} \sigma^{2-n} (1 + c_1(n)\Lambda\sigma)^{n-2} \int_{|x|=\sigma} |Du \frac{x}{|x|}|^2 d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\le \frac{d}{d\sigma} [\sigma^{2-n} (1 + c_1(n)\Lambda\sigma)^{n-2} E_{0,\sigma}(u)] \ ,$$

also gilt

$$0 \le \frac{d}{d\sigma} [\sigma^{2-n} (1 + c_1(n)\Lambda\sigma)^{n-2} E_{0,\sigma}(u)] \ .$$

Integrieren wir diese Ungleichung von ρ bis r, so erhalten

wir die behauptete Monotonieformel mit einer neuen Konstanten $c_4(n) < \infty$ für alle Radien $0 < \rho \le r < 1$.

Korollar 3.5: ([S])
Sei u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierend und $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Dann gibt es einen Radius $R(n,\tilde{\Omega}) > 0$, derart daß für alle $a \in \Omega$ und $0 < \sigma \le \rho \le R(n,\tilde{\Omega})$ die Monotonieformel

$$\int_{B_\sigma(a)} e(u)\ dH^n \le c_5(n)\,(\frac{\sigma}{\rho})^{n-2} \int_{B_\rho(a)} e(u)\ dH^n$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $c_5(n)<\infty$ gilt.

Beweis:
Zu $\Lambda := \Lambda_1$ (Λ_1 ist die Konstante aus Lemma 3.3) und $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ gibt es nach Lemma 3.2 einen Radius $R(n,\tilde{\Omega}) > 0$, derart daß für alle $a \in \tilde{\Omega}$ die Abbildung $w(x) := u(\mathrm{Exp}_a(Rx))$ das Funktional $I(\cdot, g_R) \in F_\Lambda$ lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ minimiert. Mit der Monotonieformel erhalten wir für alle $0 < \sigma \le \rho < 1$

$$E_{0,\sigma}(w) \le c_4(n)\,(\frac{\sigma}{\rho})^{n-2} E_{0,\rho}(w)\ ,$$

woraus mit (3.8) folgt

$$I_{0,\sigma}(w,g_R) \le c_5(n)\,(\frac{\sigma}{\rho})^{n-2} I_{0,\rho}(w,g_R)\ .$$

Beachten wir noch (3.4), so ergibt sich die Behauptung.

Wir kommen nun zu einer weiteren Anwendung der Monotonieformel.

Lemma 3.5:
Es gibt Konstanten $\Lambda_2(n) > 0$ und $c_{13}(n) < \infty$ mit der Eigenschaft, daß für jede lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ I-minimierende Abbildung u, $I \in F_\Lambda$ mit $0 < \Lambda \le \Lambda_2(n)$, für alle $x \in B_{1/2}(0)$ und $0 < \rho \le 1/2$ gilt:

$$\rho^{2-n}\, E_{x,\rho}(u) \le c_{13}(n)\ E_{0,1}(u)\ .$$

Beweis:

Für $1/8 \le \rho \le 1/2$ und alle $x \in B_{1/2}(0)$ ist die Behauptung klar. Sei also $0 < \rho \le 1/8$ und $x \in B_{1/2}(0)$. Wir führen nun folgende Abkürzungen ein

$$\underline{Q}(x) = (q_{\alpha\beta}(x))_{1 \le \alpha,\beta \le n} ,$$

$$d_{min}(x) = \text{kleinster Eigenwert von } \underline{Q}(x) ,$$

$$d_{max}(x) = \text{größter Eigenwert von } \underline{Q}(x) .$$

Beachten wir die Definition der Klasse F_Λ, so finden wir

$$(1 - c_6(n)\Lambda)|\xi| \le |\underline{Q}(x)\xi| \le (1 + c_6(n)\Lambda)|\xi| \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

woraus sich leicht

$$(3.9) \qquad 1 - c_6(n)\Lambda \le d_{min}(x) \le d_{max}(x) \le 1 + c_6(n)\Lambda$$

ergibt. Sei nun $0 < \Lambda \le \frac{3}{4c_6(n)}$. Diagonalisieren wir $\underline{Q}(x)$, so erhalten wir $\underline{Q}(x) = \underline{S} \circ \underline{D} \circ \underline{S}^t$ mit einer orthogonalen Abbildung $\underline{S}$ und einer Diagonalmatrix $\underline{D}$, deren Diagonalelemente die Eigenwerte $d_{min}(x), \ldots, d_{max}(x)$ von $\underline{Q}(x)$ sind. Mit $\underline{L} := \underline{S} \circ \underline{D}^{1/2}$ definieren wir für $|y| \le 1$

$$(3.10) \qquad F(y) := x + \frac{1}{4}\,\underline{L}^{-1} y$$

und beachten, daß wegen der Wahl von Λ für alle $|y| \le 1$

$$|F(y) - x|^2 = \frac{1}{16}|\underline{D}^{-1/2} \circ \underline{S}^t y|^2 \le \frac{|y|^2}{16(1 - c_6(n)\Lambda)} \le \frac{1}{4}$$

gilt, d.h.

$$(3.11) \qquad F(B_1(0)) \subset B_{1/2}(x) \subset B_1(0) .$$

Setzen wir für $|y| \le 1$

$$\underline{Y}(y) := \underline{L}^{-1} \circ \underline{Q}(F(y)) \circ (\underline{L}^{-1})^t = \underline{D}^{-1/2} \circ \underline{S}^t \circ \underline{Q}(F(y)) \circ \underline{S} \circ \underline{D}^{-1/2} ,$$

so erhalten wir mit

$$\sqrt{\gamma(y)} := \sqrt{\det(\underline{\gamma}(y))} = \sqrt{\det(\underline{Q}(F(y)))}\ \det(\underline{L}^{-1})$$

und der Transformationsformel für alle $\sigma \in]0,1[$

$$(3.12)\qquad \int_{F(B_\sigma(0))} q^{\alpha\beta} D_\alpha u \bullet D_\beta u\ \sqrt{q}\ d\mathcal{L}^n = \\ = 4^{2-n} \int_{B_\sigma(0)} \gamma^{\alpha\beta} D_\alpha (u\circ F) \bullet D_\beta (u\circ F)\ \sqrt{\gamma}\ d\mathcal{L}^n\ .$$

Wegen

$$\sum_{\alpha\beta\varkappa} \left|\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}(y)}{\partial y^{\varkappa}}\right| \le c_7(n)\Lambda =: \Lambda_* \quad \forall\ |y| \le 1\ ,\ \gamma_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta},$$

ist für $0 < \Lambda \le \min\{\Lambda_1(n)/c_7(n), 3/(4c_6(n))\} =: \Lambda_2(n)$ durch

$$w \longmapsto I(w,\gamma) := \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} \gamma^{\alpha\beta} D_\alpha w \bullet D_\beta w\ \sqrt{\gamma}\ d\mathcal{L}^n$$

ein Funktional aus der Klasse F_{Λ_*} mit $0 < \Lambda_* \le \Lambda_1(n)$ definiert, und $u\circ F$ minimiert $I(\cdot,\gamma)$ lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\mathbb{B})$. Mit der Monotonieformel 3.4, (3.8) und (3.12) ergibt sich für alle $0 < \sigma \le r < 1$

$$(*)\qquad \sigma^{2-n} \int_{F(B_\sigma(0))} q^{\alpha\beta} D_\alpha u \bullet D_\beta u\ \sqrt{q}\ d\mathcal{L}^n \le \\ \le 4^{2-n} c_8(n) \sigma^{2-n} \int_{B_\sigma(0)} |D(u\circ F)|^2\ d\mathcal{L}^n \le \\ \le 4^{2-n} c_9(n) r^{2-n} \int_{B_r(0)} |D(u\circ F)|^2\ d\mathcal{L}^n \le \\ \le c_{10}(n) r^{2-n} \int_{F(B_r(0))} q^{\alpha\beta} D_\alpha u \bullet D_\beta u\ \sqrt{q}\ d\mathcal{L}^n\ .$$

Zusammen mit

$$(3.13)\qquad B_\rho(x) \subset F(B_{4\rho\sqrt{1+c_6(n)\Lambda}}(0)) \subset F(B_{6\rho}(0))\ ,$$

(3.8) und (3.11) ergibt sich dann für $0 < \rho \le 1/8$

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho(x)} |Du|^2\ d\mathcal{L}^n \le$$

$$\leq c_{11}(n)(6\rho)^{2-n} \int_{F(B_{6\rho}(0))} q^{\alpha\beta} D_\alpha u \bullet D_\beta u \sqrt{q}\, d\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq c_{12}(n) \int_{F(B_1(0))} q^{\alpha\beta} D_\alpha u \bullet D_\beta u \sqrt{q}\, d\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq c_{13}(n) \int_{B_1(0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n \ .$$

Wir beenden den Beweis von Lemma 3.6 mit der Feststellung, daß alle im Beweis gemachten Abschätzungen unabhängig vom Punkt $x \in B_{1/2}(0)$ sind.

Bemerkung:

Die Abschätzung (*), die für alle $x \in B_{1/2}(0)$ und $0 < \sigma \leq r < 1$ gilt, kann als Energiemonotonieformel für konzentrische Ellipsoide angesehen werden.

Wir kommen nun zur Konstruktion geeigneter Vergleichsabbildungen zu lokal in $W^{1,2}(B_1(0), \overline{B})$ energieminimierenden Abbildungen. Dazu wählen wir $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0), \mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\int_{B_1(0)} \varphi \, d\mathcal{L}^n = 1$. Setzen wir $\overline{u} := \int_{B_1(0)} \varphi u \, d\mathcal{L}^n$, so ergibt sich aus der Poincaré-Ungleichung

$$\int_{B_1(0)} |u - \overline{u}|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq c_{14}(n) \int_{B_1(0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq c_{14}(n) E_* \ ,$$

sofern $E_{o,1}(u) \leq E_*$ ist. Diese Abschätzung können wir leicht in eine Abschätzung für den Abstand von $\overline{u}$ zum Hindernis $\overline{B}$ übersetzen.

$$\operatorname{dist}(\overline{u}, \overline{B}) \leq \mathcal{L}^n(B_1(0))^{-1} \int_{B_1(0)} |u - \overline{u}| d\mathcal{L}^n \leq c_{15}(n) \sqrt{E_*} \ .$$

Definieren wir $u_{x,\rho}(y) := u(x - \rho y)$ für $x \in B_{1/2}(0)$ und $0 < \rho \leq 1/4$, so finden wir mit Lemma 3.6, $0 < \Lambda \leq \Lambda_2(n)$,

$$(3.14) \qquad E_{o,1}(u_{x,\rho}) = \rho^{2-n} E_{x,\rho}(u) \leq c_{13}(n) E_{o,1}(u) \leq c_{13}(n) E_* \ .$$

Nun glätten wir u auf $B_{1/2}(0)$ mit einem Glättungsradius

$0 < \rho \le 1/4$:

$$u^\rho(x) := \int_{B_1(0)} \varphi(y)\, u(x-\rho y)\; d\mathcal{L}^n(y) = \overline{u_{x,\rho}} =$$

$$= \int_{B_\rho(x)} \varphi^\rho(x-y)\, u(y)\; d\mathcal{L}^n(y) \ .$$

Dabei ist $\varphi^\rho(z) := \rho^{-n}\varphi(z/\rho)$. Mit (3.7) finden wir eine Abschätzung für den Abstand von $u^\rho(x)$ zu $\overline{B}$

$$\text{(3.15)} \qquad \operatorname{dist}(u^\rho(x), \overline{B}) \le \mathcal{L}^n(B_1(0))^{-1} \int_{B_1(0)} |u_{x,\rho} - \overline{u_{x,\rho}}|\, d\mathcal{L}^n \le$$

$$\le c_{15}(n) E_{0,1}(u_{x,\rho})^{1/2} \le c_{16}(n)\sqrt{E_*} \ .$$

Wählen wir nun E_* genügend klein, so liegt $u^\rho(x)$ in der gleichmäßigen Umgebung $\mathcal{O}$ von $\overline{B}$, auf der die Lipschitz-Retraktion $R : \mathcal{O} \longrightarrow \overline{B}$ definiert ist. Ist also

$$\text{(3.16)} \qquad 0 < E_* \le c_{17}(n, \overline{B}) \ ,$$

so liegt $u^\rho(x)$ in $\mathcal{O}$ für alle $x \in B_{1/2}(0)$, und wir können analog zu Schoen und Uhlenbeck [SU1] definieren

$$\text{(3.17)} \qquad u_\rho(x) := R(u^\rho(x)), \quad u_\rho : B_{1/2}(0) \longrightarrow \overline{B} \ .$$

O.B.d.A. können wir nach dem Satz von Kirszbraun ([Fe],2.10.43) annehmen, daß R auf den ganzen $\mathbb{R}^l$ mit derselben Lipschitz-Konstante fortgesetzt ist. Dann ergibt sich mit Lemmma 1.4, Kap. 1, und bekannten Eigenschaften von Glättungsoperatoren ([GT], Kap.7)

$$E_{0,1/2}(u_\rho) \le \operatorname{Lip}(R)^2 E_{0,1/2}(u^\rho) \le \operatorname{Lip}(R)^2 E_{0,1}(u)$$

und

$$\|u_\rho\|_{2,B_{1/2}} \le \|R(u^\rho) - R(0)\|_{2,B_{1/2}} + c_{17}(n)\,|R(0)|$$

$$\le \operatorname{Lip}(R)\, \|u^\rho\|_{2,B_{1/2}} + c_{17}(n)\,|R(0)|$$

$$\leq \mathrm{Lip}(R)\,\|u\|_{2,B_1} + c_{17}(n)\,|R(0)| \ .$$

Dies impliziert, daß u_ρ in $W^{1,2}(B_{1/2}(0),\bar{B})$ liegt.

Lemma 3.7:

Setze $\rho_* := E_*^{1/4}$. Dann gilt für alle $\rho \in]0,\rho_*]$

$$E_{0,1/2}(u^\rho) \leq E_{0,1}(u) \ , \ \|u^\rho\|_{2,B_{1/2}} \leq \|u\|_{2,B_1} \tag{3.18}$$

und

$$\sup_{x\in B_{1/2}} |u^{\rho *}(x) - u^{\rho *}(0)|^2 \leq c_{20}(n)\sqrt{E_*} \ . \tag{3.19}$$

Beweis:

(3.18) ergibt sich unmittelbar aus bekannten Eigenschaften von Glättungsoperatoren. Nun gilt

$$\begin{aligned} |Du^{\rho *}(x)|^2 &= \Big| \int_{B_1(0)} \varphi^{\rho *}(x-y)\,Du(y)\,d\mathcal{L}^n(y)\Big|^2 \leq \\ &\leq \int_{B_1(0)} \varphi^{\rho *}(x-y)\,|Du(y)|^2 d\mathcal{L}^n \leq \\ &\leq c(\varphi)\,\rho_*^{-n} \int_{B_{\rho_*}(x)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \leq \\ &\leq c_{21}(n)\,\rho_*^{-2} E_* = c_{21}(n)\sqrt{E_*} \ . \end{aligned}$$

Dem Leser wird nicht entgangen sein, daß wir

$$0 < E_* \leq 4^{-4} \tag{3.20}$$

fordern müssen. (3.15) stellt nun eine punktweise Ungleichung für $x \in B_{1/2}(0)$ dar, die unabhängig vom jeweiligen Punkt für alle Glättungsradien $\rho \in]0,1/4]$ gilt. Wir können also für jeden Punkt $x \in B_{1/2}(0)$ einen eigenen Glättungsradius wählen. Dies wollen wir so tun, daß u_ρ außerhalb einer kleinen Kugel um den Ursprung mit u übereinstimmt. Ist

(3.21) $\quad E_*^{1/8} =: \tau < 1/4 \ ,$

$\beta \in]\tau, 1/4[$ ein vorerst freier Parameter, ζ eine reelle nichtwachsende C^∞-Funktion mit

(3.22)
$$\begin{cases} \zeta(t) = \rho_* & 0 \le t \le \beta \\ \zeta(t) = 0 & t \ge \tau + \beta \\ |\zeta'(t)| \le 2\tau & \forall\ t \ge 0 \end{cases}$$

und $\rho(x) := \zeta(|x|)$, so definieren wir in Analogie zu Schoen und Uhlenbeck [SU1]

$$U^\rho(x) := u^{\rho(x)}(x) = \int_{B_{\rho(x)}(x)} \varphi^\rho(x-y)u(y)d\mathcal{L}^n(y)$$

für $|x| < \beta + \tau$ und

$$U^\rho(x) := u(x)$$

für $|x| \ge \beta + \tau$. Beachten wir noch (3.8), so können wir die Vergleichsabbildung

(3.23) $\quad U_\rho(x) := R(U^\rho(x)) \ , \ U_\rho : B_1(0) \longrightarrow \bar{B}$

definieren. Es gilt

Lemma 3.8:

Für $\beta \in]\tau, 1/4[$ liegt die Abbildung U_ρ in $W^{1,2}(B_1(0), \bar{B})$ und erfüllt $U_\rho = u$ auf $B_1(0) \setminus B_{\beta+\tau}(0)$. Weiter gibt es Konstanten $c_{23}(n,\bar{B}) < \infty$ und $c_{24}(n,\bar{B}) < \infty$, derart daß gilt:

(3.24)
$$\int_{B_{\beta+\tau} \setminus B_\beta} |U_\rho|^2 d\mathcal{L}^n \le c_{24}(n,\bar{B}) \Big[|R(0)|^2 + \int_{B_{\beta+2\tau} \setminus B_{\beta-\tau}} |u|^2 d\mathcal{L}^n \Big]$$

(3.25) $$\int_{B_{\beta+\tau}\setminus B_\beta} |DU_\rho|^2 d\mathcal{L}^n \le c_{23}(n,\bar{B}) \int_{B_{\beta+2\tau}\setminus B_{\beta-\tau}} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \ .$$

Beweis:

Es genügt (3.25) für U^ρ anstatt U_ρ zu beweisen. Weiter können wir uns auf glatte u beschränken. Der Rest folgt dann durch ein Approximationsargument. Mit der Transformationsformel ergibt sich

(3.26) $$U^\rho(x) = \int_{B_1} \varphi(y) u(x - \rho(x)y)\ d\mathcal{L}^n(y) \ .$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach x^α, so erhalten wir

$$\frac{\partial U^\rho}{\partial x^\alpha}(x) = \int_{B_1} \varphi(y) \Big[\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}(x-\rho(x)y) - \frac{\partial u}{\partial x^\varkappa}(x-\rho(x)y) y^\varkappa \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha}(x)\Big] d\mathcal{L}^n(y),$$

woraus sich leicht unter Beachtung der Definition von $\rho(x)$ und (3.22) ergibt

$$\Big|\frac{\partial U^\rho}{\partial x^\alpha}(x)\Big|^2 \le (1+2\tau)^2 \Big[\int_{B_1} \varphi(y) |Du(x-\rho(x)y)|\ d\mathcal{L}^n(y)\Big]^2 \le$$
$$\le 4 \int_{B_1} \varphi(y) |Du(x-\rho(x)y)|^2\ d\mathcal{L}^n(y) \ .$$

Integrieren wir diese Ungleichung über $\Sigma \subset\subset B_{1-\tau}$, so finden wir

$$\int_\Sigma |DU^\rho|^2 d\mathcal{L}^n \le 4n \int_\Sigma \int_{B_1} \varphi(y) |Du(x-\rho(x)y)|^2 d\mathcal{L}^n(y) d\mathcal{L}^n(x).$$

Für $y \in B_1$ ist die durch $F_y(x) := x - \rho(x)y$ definierte Abbildung ein Diffeomorphismus von Σ nach $\Sigma_\tau := \{x: \operatorname{dist}(x,\Sigma) < \tau\}$. Damit folgt

$$\int_\Sigma |Du(x-\rho(x)y)|^2 d\mathcal{L}^n(x) \le$$
$$\le c_{22}(n) \int_\Sigma |Du(F_y(x))|^2 |\det(DF_y(x))|\, d\mathcal{L}^n(x)$$
$$= c_{22}(n) \int_{\Sigma_\tau} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \ ,$$

und für glattes u haben wir gezeigt

$$\int_\Sigma |Du_\rho|^2 d\mathcal{L}^n \le 4nc_{22}(n)\ \mathrm{Lip}(R)^2 \int_{\Sigma_\tau} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \ .$$

Wählen wir speziell $\Sigma = B_{\beta+\tau} \setminus B_\beta$, so ergibt sich mit $c_{23}(n,\bar{B}) := 4nc_{22}(n)\ \mathrm{Lip}(R)^2$ die Behauptung.

Für U^ρ zeigt man analog zum ersten Teil des Beweises die Abschätzung

$$\int_\Sigma |U^\rho|^2 d\mathcal{L}^n \le c_{22}(n) \int_{\Sigma_\tau} |u|^2 d\mathcal{L}^n \ ,$$

aus der sich mit $\Sigma = B_{\beta+\tau} \setminus B_\beta$ die Behauptung wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |U_\rho|^2 d\mathcal{L}^n &\le 2 \int_\Sigma |R(U^\rho) - R(0)|^2 d\mathcal{L}^n + 2\mathcal{L}^n(B_1)\,|R(0)|^2 \le \\ &\le 2c_{22}(n)\mathrm{Lip}(R)^2 \int_{\Sigma_\tau} |u|^2 d\mathcal{L}^n + 2\mathcal{L}^n(B_1)\,|R(0)|^2 \le \\ &\le c_{24}(n,\bar{B})\Big[\,|R(0)|^2 + \int_{\Sigma_\tau} |u|^2 d\mathcal{L}^n\Big] \ .\end{aligned}$$

Wir kommen nun zum

Hauptlemma 3.9:

Es gibt Konstanten $0 < E_* = E_*(n,\bar{B}) < 1$ und $\gamma = \gamma(n) > 0$, so daß für $0 < E \le E_*$, $0 < \Lambda \le E_*$, $r := E^\gamma$ und jede lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\bar{B})$ I-minimierende Abbildung u, $I \in F_\Lambda$, mit $E_{0,1}(u) \le E_*$ gilt

$$r^{2-n} E_{0,r}(u) + \Lambda r \le \frac{1}{2}\,(\,E_{0,1}(u) + \Lambda\,) \ .$$

Beweis:

Seien zunächst $E > 0, \Lambda > 0$ Konstanten mit

$$(3.27) \qquad 0 < E < 4^{-8},\ 0 < E < c_{17}(n,\bar{B}),\ 0 < \Lambda \le E \le \Lambda_2(n)$$

und $u \in W^{1,2}(B_1(0),\bar{B})$ minimiere lokal das Funktional $I \in F_\Lambda$. Setzen wir $\tau := E^{1/8}$, $\rho_* := \tau^2 = E^{1/4}$ und wählen $\beta \in]\tau, 1/4[$, so können wir die Konstruktion der Vergleichsabbildung U^ρ

aus (3.23) mit diesen Parametern durchführen. Wegen Lemma 3.3 (Minimalität von u), $\beta + \tau \le 1/2$, $\rho_*(x) = \rho_*$ für alle $x \in B_\beta$ und (3.25) gilt

$$(3.28)\qquad E_{o,\beta}(u) \le E_{o,\beta+\tau}(u) \le (1 + c_1(n)\Lambda(\beta+\tau))E_{o,\beta+\tau}(U_\rho) \le$$

$$\le c_{25}(n)\left[E_{o,\beta}(u_{\rho_*}) + \int_{B_\beta \tau \setminus B_\beta} |DU_\rho|^2 d\mathcal{L}^n\right] \le$$

$$\le c_{26}(n,\bar{B})\left[E_{o,\beta}(u^{\rho*}) + \int_{B_{\beta+2\tau} \setminus B_{\beta-\tau}} |Du|^2 d\mathcal{L}^n\right] .$$

Sei nun h die glatte Lösung des linearen Dirichlet-Problems

$$\Delta h = 0 \text{ auf } B_{1/2},\quad h = u^{\rho*} \text{ auf } \partial B_{1/2} .$$

Mit (3.19) folgt dann

$$u^{\rho*}(B_{1/2}) \subset B_{\sqrt{c_{20}}E^{1/4}}(u^{\rho*}(0)) ,$$

und wegen der konvexen Hülleigenschaft liegt das Bild von h in derselben Kugel, d.h. es gilt

$$(3.29)\qquad \sup_{x\in B_{1/2}} |h(x) - u^{\rho*}(x)| \le 2\sqrt{c_{20}}\, E^{1/4} .$$

Für den ersten Term der rechten Seite von (3.28) finden wir dann mit Lemma 1.3, der Minimalität von h, (3.18) und (3.29)

$$(3.30)\qquad E_{o,\beta}(u^{\rho*}) \le 2[E_{o,\beta}(u^{\rho*} - h) + E_{o,\beta}(h)] \le$$

$$\le 2[E_{o,1/2}(u^{\rho*}-h) + 2^n\beta^n E_{o,1/2}(h)] \le$$

$$\le 2^{n+1}[E_{o,1/2}(u^{\rho*}-h) + \beta^n E_{o,1/2}(u^{\rho*})] \le$$

$$\le 2^{n+1}[E_{o,1/2}(u^{\rho*}-h) + \beta^n E_{o,1}(u)] \le$$

$$\le 2^{n+1}\left[\beta^n E_{o,1}(u) + \int_{B_{1/2}} (h-u^{\rho*})\cdot\Delta u^{\rho*} d\mathcal{L}^n\right] \le$$

$$\le 2^{n+2}\left[\beta^n E_{o,1}(u) + \sqrt{c_{20}}E^{1/4}\int_{B_{1/2}} |\Delta u^{\rho*}| d\mathcal{L}^n\right] .$$

Für $x \in B_{1/2}$ ergibt sich aus der Definition von u^{ρ_*}:

$$(3.31)\qquad |\Delta u^{\rho_*}(x)| = \left|\int \Delta_x \varphi^{\rho_*}(x-y)u(y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| =$$

$$= \left|\int \Delta_y \varphi^{\rho_*}(x-y)u(y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| =$$

$$= \left|\int D_{y^\alpha}\varphi^{\rho_*}(x-y)D_{y\alpha}u(y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| \le$$

$$\le \left|\int q^{\alpha\beta}D_{y^\alpha}u(y)D_{y\beta}\varphi^{\rho_*}(x-y)\sqrt{q}\,d\mathcal{L}^n(y)\right| + (I)\ ,$$

wobei wir

$$(I) := \left|\int (q^{\alpha\beta}\sqrt{q}-\delta^{\alpha\beta})D_{y^\alpha}u(y)D_{y^\beta}\varphi^{\rho_*}(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right|$$

gesetzt haben. Mit

$$|q^{\alpha\beta}\sqrt{q}-\delta^{\alpha\beta}| \le c_{27}(n)\Lambda\ ,\quad |\nabla_y\varphi^{\rho_*}(x-y)| \le c(\varphi)\,\rho_*^{-1-n}\chi_{B_{\rho_*}(x)}$$

und der Monotonieformel ergibt sich für (I)

$$(3.32)\qquad (I) \le c_{27}(n)\Lambda\rho_*^{-1-n}\int_{B_{\rho_*}(x)}|Du|\,d\mathcal{L}^n \le$$

$$\le c_{28}(n)\Lambda\rho_*^{-2}\left[\rho_*^{2-n}\int_{B_{\rho_*}(x)}|Du|^2\,d\mathcal{L}^n\right]^{1/2} \le$$

$$\le c_{29}(n)\Lambda\rho_*^{-2}\sqrt{E} = c_{29}(n)\Lambda\ .$$

Nun behandeln wir den ersten Term der rechten Seite von (3.31). Wie wir leicht der Definition der Klasse F_Λ entnehmen, sind die Voraussetzungen der allgemeinen Variationsgleichung aus Kapitel I für das Funktional $I \in F_\Lambda$ und die lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ I-minimierende Abbildung $u \in W^{1,2}(B_1(0),\overline{B})$ erfüllt. Es existiert also ein positives Radon-Maß λ auf $B_1(0)$, derart daß für alle vektorwertigen $\mathbb{Y} \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^\infty(B_1(0),\mathbb{R}^1)$ die Variationsgleichung

$$\int_{B_1} q^{\alpha\beta}\sqrt{q}(D_\alpha u \bullet D_\beta \mathbb{Y} + \mathbb{Y}\bullet\Pi\circ u\,(D_\alpha u, D_\beta u))\,d\mathcal{L}^n =$$

$$= \int_{u^{-1}(\partial B)} \nu\circ u\bullet\mathbb{Y}\,d\lambda$$

gilt. Für alle skalaren $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2} \cap L^{\infty}(B_1(o), \mathbb{R})$ können wir daraus leicht das System

$$(3.33) \qquad \int_{B_1} q^{\alpha\beta}\sqrt{q} D_\alpha u \, D_\beta \eta \, d\mathcal{L}^n = \int_{u^{-1}(\partial B)} \eta \nu \circ u \, d\lambda - \int_{B_1} q^{\alpha\beta}\sqrt{q}\, \eta \, \Pi \circ u \, (D_\alpha u, D_\beta u) \, d\mathcal{L}^n$$

herleiten. Nun sind wir in der Lage den ersten Term der rechten Seite von (3.31) abzuschätzen. Testen wir (3.33) mit $\eta(y) := \varphi^{\rho *}(x-y)$, so erhalten wir

$$(3.34) \qquad \left| \int q^{\alpha\beta}(y)\sqrt{q(y)} D_{y\alpha} u(y) D_{y\beta} \varphi^{\rho *}(x-y) \, d\mathcal{L}^n(y) \right| \leq$$

$$\leq \int_{u^{-1}(\partial B)} \varphi^{\rho *}(x-y) \, d\lambda +$$

$$+ c_{30}(n) \|\Pi\|_{\infty, \overline{B}} \int_{B_1} \varphi^{\rho *}(x-y) \, |Du(y)|^2 d\mathcal{L}^n(y) \, .$$

Beachten wir noch Korollar 2.10, so finden wir

$$\int_{u^{-1}(\partial B)} \varphi^{\rho *}(x-y) \, d\lambda \leq$$

$$\leq \int_{u^{-1}(\partial B)} \varphi^{\rho *}(x-y) \, q^{\alpha\beta}\sqrt{q} D_{y\alpha} u(y) \cdot (d\nu(u(y)) D_{y\beta} u(y)) \, d\mathcal{L}^n(y) \leq$$

$$\leq c_{31}(n) \|d\nu\|_{\infty, \partial B} \int_{B_1} \varphi^{\rho *}(x-y) \, |Du(y)|^2 d\mathcal{L}^n(y) \, .$$

Zusammen mit (3.34), (3.32) und (3.21) ergibt sich daraus für $|\Delta u^{\rho *}(x)|$ und alle $x \in B_{1/2}$ die Abschätzung

$$|\Delta u^{\rho *}(x)| \leq c_{29}(n) \Lambda + c_{32}(n) (\|\Pi\|_{\infty, \overline{B}} + \|d\nu\|_{\infty, \partial B}) \cdot$$

$$\cdot \int_{B_1} \varphi^{\rho *}(x-y) \, |Du(y)|^2 d\mathcal{L}^n(y) \leq$$

$$\leq c_{33}(n, \overline{B}) [\Lambda + \int_{B_1} \varphi^{\rho *}(x-y) \, |Du(y)|^2 d\mathcal{L}^n(y)] \, .$$

Integrieren wir diese Ungleichung über $B_{1/2}$, so erhalten wir

$$\int_{B_{1/2}} |\Delta u^{\rho *}| d\mathcal{L}^n \leq$$
$$\leq c_{33}(n,\bar{B})\,[\Lambda + \int_{B_{1/2}} \int_{B_1} \varphi^{\rho *}(x-y)\,|Du(y)|^2 d\mathcal{L}^n(y)\,d\mathcal{L}^n(x)\,] \leq$$
$$\leq c_{33}(n,\bar{B})\,[\Lambda + E_{o,1}(u)]\ ,$$

und aus (3.30) ergibt sich damit für den ersten Term der rechten Seite von (3.28)

$$(3.35) \qquad E_{o,\beta}(u^{\rho *}) \leq c_{34}(n,\bar{B})\,[\beta^n E_{o,1}(u) + E^{1/4}(E_{o,1}(u) + \Lambda)]\ .$$

Im nun folgenden zweiten Teil des Beweises werden wir den zweiten Summand der rechten Seite von (3.38) behandeln. Sei dazu $\gamma := \frac{1}{16n}$, $r := E^\gamma$ und $m \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl mit $m \leq \frac{r}{3\tau}$, d.h. es gilt

$$(3.36) \qquad m > \frac{r}{3\tau} - 1 = \frac{1}{3}\,E^{\gamma - 1/8} - 1 > \frac{1}{3}\,E^{-1/16} - 1\ .$$

Nun zerlegen wir das Intervall $[r, r+3m\tau] = \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ in m abgeschlossene Intervalle I_j der Länge 3τ. Führen wir $\int_{[a,b]} := \int_{B_b \setminus B_a}$ als Abkürzung ein, und fordern

$$(3.37) \qquad 0 < E^\gamma < 1/2\ ,$$

d.h. es gilt $r + 3m\tau < 1$, so erhalten wir

$$\int_{[r,r+3m\tau]} |Du|^2 d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^{m} \int_{I_j} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \leq E_{o,1}(u)\ .$$

Dies bedeutet aber, daß ein $j \in \{1,\ldots,m\}$ existiert, derart daß gilt

$$(3.38) \qquad \int_{I_j} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \leq \frac{1}{m}\,E_{o,1}(u) \leq \frac{E^{1/16}}{\frac{1}{3} - E^{1/16}}\,E_{o,1}(u) \leq$$
$$\leq 6E^{1/16} E_{o,1}(u)\ .$$

Für die letzte Abschätzung mußten wir

(3.39) $\quad 0 < E^{1/16} < 1/6 \quad (\Rightarrow 0 < E < 4^{-8})$

annehmen. Wir bemerken, daß mit dieser Wahl von E auch $\frac{1}{3} E^{-1/16} - 1 > 0$ ist. Den bei der Konstruktion von U_ρ noch freien Parameter $\beta \in]\tau, 1/4[$ wählen wir nun so, daß $I_j = [\beta-\tau, \beta+2\tau]$ ist. Fordern wir

(3.40) $\quad 0 < E^\gamma < 1/8 \quad (\Rightarrow 0 < E^\gamma < 1/2$, also (3.27)) ,

so ist diese Wahl möglich, wie wir der folgenden Ungleichungskette entnehmen

$$\tau < r+\tau \leq \beta = r+(3j-2)\tau \leq r+(3m-2)\tau \leq 2r-2\tau \leq 2r = 2E^\gamma < 1/4 \ .$$

Mit (3.38) ergibt sich dann für den ersten Summanden der rechten Seite von (3.28) die Abschätzung

(3.41) $$\int_{B_{\beta+2\tau} \setminus B_{\beta-\tau}} |Du|^2 d\mathcal{L}^n = \int_{I_j} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \leq 6E^{1/16} E_{o,1}(u) \ .$$

Aus (3.28), (3.35) und (3.41) folgt

$$\beta^{2-n} E_{o,\beta}(u) \leq c_{35}(n,\bar{B}) [\beta^2 + \beta^{2-n} E^{1/16}][E_{o,1}(u) + \Lambda] \ ,$$

und mit $\beta \in [r,2r]$, der Definition von γ und $r = E^\gamma$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} r^{2-n} E_{o,r}(u) &\leq r^{2-n} E_{o,\beta}(u) \leq \\ &\leq c_{35}(n,\bar{B}) \left(\frac{\beta}{r}\right)^{n-2} [4E^{2\gamma} + E^{-\gamma(n-2)+1/16}][E_{o,1}(u) + \Lambda] \leq \\ &\leq 5c_{35}(n,\bar{B}) 2^{n-2} E^{2\gamma} [E_{o,1}(u) + \Lambda] \leq \\ &\leq c_{36}(n,\bar{B}) \ E^{2\gamma} [E_{o,1}(u) + \Lambda] \ . \end{aligned}$$

Somit gilt

(3.42) $$r^{2-n} E_{o,r}(u) + \Lambda r \leq c_{37}(n,\bar{B}) \ E^\gamma [E_{o,1}(u) + \Lambda] \ .$$

Nun sammeln wir alle Bedingungen an E

$$0 < E^{1/16} < 1/6, \quad 0 < E^{\gamma} < 1/8, \quad 0 < E < c_{17}(n,\bar{B}),$$
$$0 < E \le \Lambda_2(n) \ ,$$

und fordern noch zusätzlich

$$c_{37}(n,\bar{B})\ E^{\gamma} < 1/2 \ .$$

Dann gibt es ein $0 < E_*(n,\bar{B}) < 1$, das alle diese Bedingungen erfüllt, und für $0 < E \le E_*$, $0 < \Lambda \le E_*$, $r := E^{\gamma}$ und jede lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\bar{B})$ I-minimierende Abbildung u, $I \in F_{\Lambda}$, mit $E_{0,1}(u) \le E$ gilt

$$r^{2-n} E_{0,1}(u) + \Lambda r \le \frac{1}{2}[E_{0,1}(u) + \Lambda] \ .$$

Eine erste Konsequenz des Hauptlemmas ist der folgende

Regularitätssatz 3.10:

Es gibt eine Konstante $E^* = E^*(n,\bar{B}) > 0$, so daß jede lokal in $W^{1,2}(B_1(0),\bar{B})$ I-minimierende Abbildung u mit $I \in F_{\Lambda}$, $0 < \Lambda \le E^*$ und $E_{0,1}(u) \le E^*$ auf $B_{1/2}(0)$ hölderstetig ist. Die Hölder-Konstante und der Hölder-Exponent hängen dabei nur von n und $\bar{B}$ ab.

Beweis:

Zunächst zeigen wir für alle $0 < \rho \le 1/2$

$$\rho^{2-n} E_{0,\rho}(u) \le c\ \rho^{2\alpha} \ , \tag{3.43}$$

mit einer Konstanten $0 < \alpha < 1$. Seien E_* und γ die Konstanten aus dem Hauptlemma und $E_{0,1}(u) \le E_*$, $r = E_*^{\gamma} \in]0,1[$, $I \in F_{\Lambda}$ und $0 < \Lambda \le E_*$. Dann sind für u und I die Voraussetzungen des Hauptlemmas erfüllt, d.h. es gilt

$$r^{2-n} E_{0,r}(u) + \Lambda r \le \frac{1}{2}[E_{0,1}(u) + \Lambda] \ .$$

Die skalierte Abbildung $u_{o,r}(y) := u(ry)$ ist dann eine lokal minimierende Abbildung des Funktionals $I(\cdot,q_r) \in F_\Lambda$ mit $q_r(y) := q(ry)$. Der Ungleichung

$$E_{o,1}(u_{o,r}) = r^{2-n}E_{o,r}(u) \leq \frac{1}{2}[E_{o,1}(u) + \Lambda] \leq E_*$$

entnehmen wir, daß für $I(\cdot,q_r)$ und $u_{o,r}$ die Voraussetzungen des Hauptlemmas erfüllt sind und es gilt

$$\begin{aligned}(r^2)^{2-n}E_{o,r^2}(u) + \Lambda r^2 = r^{2-n}E_{o,r}(u_{o,r}) + \Lambda r^2 \leq \\ \leq \frac{1}{2}[E_{o,1}(u_{o,r}) + \Lambda r] \leq \\ \leq (\tfrac{1}{2})^2[E_{o,1}(u) + \Lambda] \ .\end{aligned}$$

Induktiv so fortfahrend erhalten wir für alle $i \in \mathbb{N}$

$$(3.44) \qquad (r^i)^{2-n}E_{o,r^i}(u) + \Lambda r^i \leq 2^{-i}[E_{o,1}(u) + \Lambda] \ .$$

Zu $\rho \in]0,1/2]$ gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\rho \in]r^{i+1},r^i]$. Setzen wir

$$\alpha = \alpha(n,\bar{B}) := \frac{\log 2}{2\log(1/r)} \ ,$$

so folgt mit (3.44)

$$\begin{aligned}\rho^{2-n}E_{o,\rho}(u) \leq \left(\frac{r^i}{\rho}\right)^{n-2} (r^i)^{2-n}E_{o,r^i}(u) \\ \leq 2^{-i}\, r^{2-n}[E_{o,1}(u) + \Lambda] \leq \\ \leq (r^i)^{2\alpha}\, r^{2-n}[E_{o,1}(u) + \Lambda] \leq \\ \leq \rho^{2\alpha}\, r^{2-n-2\alpha}[E_{o,1}(u) + \Lambda] = c_{38}(n,\bar{B})\,\rho^{2\alpha} \ .\end{aligned}$$

Nach dem Dirichlet-Growth-Theorem genügt es eine Morrey-Bedingung

$$\rho^{2-n}E_{x,\rho}(u) \leq c\rho^{2\alpha}$$

für alle $x \in B_{1/2}(0)$ und alle Radien $0 < \rho \le 1/12$ zu zeigen. Dazu beachten wir, daß nach dem Beweis des Hauplemmas $0 < \Lambda \le E_* \le \Lambda_2(n)$ ist. Das bedeutet aber, daß wir die Abschätzungen aus dem Beweis von Lemma 3.6 anwenden können. Sei also $x \in B_{1/2}(0)$ und $0 < \rho \le \frac{1}{12}$. Führen wir zu x wie in Lemma 3.6 $\underline{\gamma}$, $\underline{L}$ und F ein, so finden wir für alle $0 < \sigma \le 1$

$$\int_{F(B_\sigma(0))} q^{\alpha\beta}\sqrt{q}D_\alpha u \bullet D_\beta u d\mathcal{L}^n =$$

$$= 4^{2-n} \int_{B_\sigma(0)} \gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}D_\alpha(u\circ F)\bullet D_\beta(u\circ F)d\mathcal{L}^n \ ,$$

und mit (3.8) und (3.11) ergibt sich

$$E_{0,1}(u\circ F) \le c_{39}(n) I_{0,1}(u\circ F, \underline{\gamma}) \le$$

$$\le c_{40}(n) \int_{F(B_1(0))} q^{\alpha\beta}\sqrt{q}D_\alpha u \bullet D_\beta u d\mathcal{L}^n \le$$

$$\le c_{40}(n) \int_{B_1(0)} q^{\alpha\beta}\sqrt{q}D_\alpha u \bullet D_\beta u d\mathcal{L}^n \le$$

$$\le c_{41}(n)\ E_{0,1}(u) \ .$$

Dem Beweis von Lemma 3.6 entnehmen wir, daß $I(\cdot,\underline{\gamma}) \in F_{\Lambda_*}$ mit $\Lambda_* = c_7(n)\Lambda$ ist. Setzen wir $E^* := E_* \min\{1,\ c_{41}(n)^{-1},\ c_7(n)^{-1}\}$, so gilt

$$E_{0,1}(u\circ F) \le E_*,\ I(\cdot,\underline{\gamma}) \in F_{\Lambda_*},\ 0 < \Lambda_* \le E_* \ ,$$

wenn $E_{0,1}(u) \le E^*$ und $0 < \Lambda \le E^*$ ist, und wir können den ersten Teil des Beweises anwenden und erhalten für alle $0 < \sigma \le 1/2$ mit (3.8), (3.13), (3.12) und (3.43)

$$E_{x,\rho}(u) \le c_{39}(n) I_{x,\rho}(u,q) \le$$

$$\le c_{39}(n) \int_{F(B_{6\rho}(0))} q^{\alpha\beta}\sqrt{q}D_\alpha u \bullet D_\beta u d\mathcal{L}^n \le$$

$$= 4^{2-n} c_{39}(n) \int_{B_{6\rho}(0)} \gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}D_\alpha(u\circ F)\bullet D_\beta(u\circ F)d\mathcal{L}^n \le$$

$$\leq c_{42}(n) \int_{B_{6\rho}(0)} |D(u\circ F)|^2 d\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq c_{43}(n,\bar{B})\, 6^{n-2+2\alpha}\, \rho^{n-2+2\alpha} \quad .$$

Mit dem Hinweis, daß alle im zweiten Teil des Beweises gemachten Abschätzungen unabhängig vom Punkt $x \in B_{1/2}(0)$ sind, beenden wir den Beweis.

Sei nun $a \in \Omega$. Dann gibt es zu $\Lambda > 0$ einen Radius $0 < R(a,\Lambda) = R$, derart daß die Abbildung $w(x) := u(\mathrm{Exp}_a(\rho x))$ für $0 < \rho \leq R$ lokal das Funktional $I(\cdot, g_\rho) \in F_\Lambda$ minimiert. u sei dabei eine lokal in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$ energieminimierende Abbildung. Nach (3.4) gilt für $0 < \rho \leq R$

$$\rho^{2-n} E(u, B_\rho(a)) = I(w, g_\rho) \quad ,$$

und aus (3.8) ergibt sich

$$E_{0,1}(w) \leq (1 + c_2(n)\Lambda)\, I(w, g_\rho) \leq c_{44}(n)\, \rho^{2-n} E(u, B_\rho(a)) \quad .$$

Gibt es nun ein $\rho \in]0,R]$ mit

$$\rho^{2-n} E(u, B_\rho(a)) \leq \frac{E^*}{c_{44}(n)} \quad ,$$

wobei E^* die Konstante aus Satz 3.10 ist, so können wir, vorausgesetzt wir haben Λ hinreichend klein gewählt ($0 < \Lambda \leq E^*$), den Regularitätssatz 3.10 anwenden und erhalten

Satz 3.11:

Sei $a \in \Omega$. Dann gibt es Konstanten $E^*(n,\bar{B}) > 0$ und $R(a,E^*) > 0$, so daß jede lokal energieminimierende Abbildung $u \in W^{1,2}(B_\rho(a),\bar{B})$ mit $0 < \rho \leq R(a,E^*)$ und $\rho^{2-n} E(u, B_\rho(a)) \leq E^*$ auf $B_{\rho/2}(a)$ hölderstetig ist. Die Hölder-Konstante und der Hölder-Exponent hängen nur von n und $\bar{B}$ ab.

Sei nun u lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierend. Mit Ω_o bezeichnen wir die Menge der regulären Punkte von u in Ω. Dabei ist $a \in \Omega$ definitionsgemäß ein regulärer Punkt, wenn es eine geodätische Kugel $B_\rho(a) \subset \Omega$ gibt, auf der u hölderstetig ist. Eine einfache Konsequenz des Regularitätssatzes 3.11 ist das folgende

Korollar 3.12:
Zu jeder lokal energieminimierenden Abbildung $u \in W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ gibt es eine offene Menge $\Omega_o \subset \Omega$, auf der u von der Klasse $C^{0,\alpha}(\Omega_o,\mathbb{R}^1)$ ist, und es gilt

$$\Omega \setminus \Omega_o \subset \{\, a \in \Omega:\ \liminf_{\rho \downarrow 0} \rho^{2-n} E(u,B_\rho(a)) > 0 \,\}$$

und

$$H^{n-2}(\Omega \setminus \Omega_o) = 0 \ .$$

Bemerkung:
Mit H^s, $s \geq 0$, bezeichnen wir das durch die Metrik auf Ω invariant definierte s-dimensionale Hausdorff-Maß ([Fe], 2.10.2) .

Der Beweis von Korollar 3.12 ergibt sich unmittelbar aus dem Regularitätssatz 3.11 und dem folgenden

Lemma 3.13: ([Gu])
Für $f \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ und $0 \leq s < n$ gilt

$$H^s(\{\, a \in \Omega:\ \liminf_{\rho \downarrow 0} \rho^{-s} \int_{B_\rho(a)} |f|\, dH^n > 0 \,\}) = 0 \ .$$

Nachfolgend wenden wir uns dem Problem der höheren Regularität lokal in $W^{1,2}(\Omega,\overline{B})$ energieminimierender Abbildungen u zu. Sei also a ein regulärer Punkt von u. Dann gibt es definitionsgemäß eine geodätische Kugel $B_\rho(a) \subset \Omega$, auf der u hölderstetig

ist. Parametrisieren wir $B_\rho(a)$ durch Normalkoordinaten, so erfüllt $w(x) := u(\mathrm{Exp}_a(x))$ auf $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$ im Distributionssinn die Gleichung

$$(3.45) \qquad -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial x^\alpha}\right) = -g^{\alpha\beta}\Pi\circ w\left(\frac{\partial w}{\partial x^\alpha},\frac{\partial w}{\partial x^\beta}\right) + \mathcal{L}^n\llcorner(\tilde{\theta}\circ w)$$

mit $\tilde{\theta}(x) = \theta(\mathrm{Exp}_a(x))$ (Siehe dazu Kap.2, (2.35)). Beachten wir, daß θ von quadratischem Wachstum in $|du|$ ist, so finden wir leicht, daß $\tilde{\theta}$ quadratisch in $|Dw|$ wächst. Genauer gilt die Abschätzung

$$0 \le \tilde{\theta} \le c_{45}(n, \|dv\|_{\infty,\partial B})\,|Dw|^2 ,$$

und die linke Seite von (3.45) läßt sich quadratisch in $|Dw|$ wie folgt abschätzen

$$(3.46) \qquad |\tilde{\theta}\circ w - g^{\alpha\beta}\Pi\circ w\left(\frac{\partial w}{\partial x^\alpha},\frac{\partial w}{\partial x^\beta}\right)| \le c_{46}(n, \|dv\|_{\infty,\partial B}, \|\Pi\|_{\infty,\bar{B}})\,|Dw|^2 .$$

Indem wir evtl. den Radius ρ verkleinern, können wir, da w auf $B_\rho(0)$ hölderstetig ist, annehmen, daß für das System (3.45) und w die Kleinheitsbedingung erfüllt ist. Nach [G], Kap.VI, Theorem 1.4 gilt dann

$$w \in C^{0,\alpha}(B_\rho(0), \mathbb{R}^1) \quad \forall\ 0 < \alpha < 1 .$$

Beachten wir, daß die Koeffizienten des Systems (3.45) auf $B_\rho(0)$ lipschitzstetig sind, so zeigt uns [G], Kap.VI, Theorem 1.5

$$(3.47) \qquad w \in C^{1,\alpha}(B_\rho(0), \mathbb{R}^1) \quad \forall\ 0 < \alpha < 1 ,$$

speziell liegt $|Dw|^2$ in $L^\infty_{loc}(B_\rho(0), \mathbb{R})$. Mit der L^p-Theorie (vgl. [M], Kap.6) finden wir dann

$$(3.48) \qquad w \in W^{2,p}_{loc}(B_\rho(0), \mathbb{R}^1) \quad \forall\ 1 \le p < \infty .$$

Zusammen mit Korollar 3.12 ergeben (3.47) und (3.48) den folgenden

Satz 3.14:

Zu jeder lokal in $W^{1,2}(\Omega,\bar{B})$ energieminimierenden Abbildung u gibt es eine offene Teilmenge $\Omega_o \subset \Omega$, auf der u von der Klasse $W^{2,p}_{loc}(\Omega_o,\mathbb{R}^1)$ für alle $1 \leq p < \infty$ (und somit auch von der Klasse $C^{1,\alpha}(\Omega_o,\mathbb{R}^1)$ für alle $0 < \alpha < 1$) ist, und für die

$$\Omega \setminus \Omega_o \subset \{ a \in \Omega: \liminf_{\rho \downarrow 0} \rho^{2-n} E(u,B_\rho(a)) > 0 \}$$

und

$$H^{n-2}(\Omega \setminus \Omega_o) = 0$$

gilt.

Einen Spezialfall dieses Satzes wollen wir als Korollar festhalten. Sei

$$\mathcal{D}_G(u) := \frac{1}{2} \int_G |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

das Dirichlet-Integral für Abbildungen $u : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$. G sei dabei ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

Korollar 3.15:

Angenommen das Hindernis B erfüllt eine der drei folgenden Bedingungen:

(i) B sei ein beschränktes C^2-Gebiet im $\mathbb{R}^1$.

(ii) B ist das Außengebiet eines beschränkten C^2-Gebietes.

(iii) B ist ein Graphenhindernis mit einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^{1-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, für die $\|\nabla f\|_{\infty,\mathbb{R}^{1-1}} + \|D^2 f\|_{\infty,\mathbb{R}^{1-1}} < \infty$ gilt.

Dann gibt es zu jeder lokal das Dirichlet-Integral minimieren-

den Abbildung $u \in W^{1,2}(G,\overline{B})$ eine offene Teilmenge G_o, auf der u von der Klasse $W^{2,p}_{loc}(G_o,\mathbb{R}^1)$ für alle $1 \le p < \infty$ (und somit auch von der Klasse $C^{1,\alpha}(G_o,\mathbb{R}^1)$ für alle $0 < \alpha < 1$) ist, und für die

$$G \setminus G_o \subset \{ a \in G: \liminf_{\rho \downarrow 0} \rho^{2-n} \int_{B_\rho(a)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n > 0 \}$$

und

$$H^{n-2}(G \setminus G_o) = 0$$

gilt.

Bemerkung:

Im Fall von Hindernissen vom Typ (i)und (ii) verallgemeinert dieses Ergebnis die Resultate von Hildebrandt [H1],[H2],[H3] und Tomi [T1],[T2] auf beliebige Dimensionen $n \ge 3$. Im Fall von Graphenhindernissen erzielen wir mit unseren Methoden unter etwas stärkeren Voraussetzungen als in [F] eine Verbesserung des dort formulierten Regularitätssatzes.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuche ich das Regularitäsverhalten energieminimierenden Abbildungen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit X in eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit Y des $\mathbb{R}^l$ mit Rand ∂Y. Der Rand fungiert als geometrisches Hindernis, an dem die energieminimierende Abbildung aufliegen kann. Meine Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten leite ich eine geometrisch motivierte Variationsgleichung für energieminimierende Abbildungen, die einer Hindernisbedingung unterworfen sind, ab. Genauer zeige ich unter natürlichen Voraussetzungen - die zweite Fundamentalform von Y in $\mathbb{R}^l$, sowie die Hauptkrümmungen des Randes ∂Y relativ zu Y seien beschränkt - , daß derartige Abbildungen schwache Lösungen eines elliptichen Systems sind, dessen rechte Seite aus einem vektorwertigem Radon-Maß besteht. Für das Radon-Maß beweise ich eine Ungleichung, die es mir erlaubt, das Maß durch die Geometrie des Hindernisses und die energieminimierende Abbildung teilweise zu charakterisieren. Das System stellt ein Substitut zur Euler-Lagrange Gleichung für energieminimierende Abbildungen dar, die keiner Hindernisbedingung unterworfen sind. Im zweiten Teil meiner Arbeit beweise ich dann für die Lösungen der von mir betrachteten Hindernisprobleme ein partielles Regularitätsresultat. Genauer zeige ich unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß es eine Lipschitz-Retraktion einer gleichmäßigen offenen Umgebung von Y in $\mathbb{R}^l$ auf Y gibt, daß energieminimierende Abbildungen bei Hindernisproblemen im Inneren von X bis auf eine abgeschlossene Menge mit $(n-2)$-dimensionalem Hausdorff-Maß Null regulär sind. Dabei ist n die Dimension von X. Mit Hilfe dieses Satzes gelingt es mir das Radon-Maß vollständig durch die Geometrie des Hindernisses und der energieminimierenden Abbildung

zu charakterisieren. Beispiele für berandete Mannigfaltigkeiten $\gamma \subset \mathbb{R}^1$, die alle gemachten Voraussetzungen erfüllen, sind: kompakte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^1$ mit Rand, Außengebiete kompakter 1-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^1$ und gewisse Graphenhindernisse.

Literaturverzeichnis

[A] Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter, Berlin - New York, 1983.

[C] Campanato, S., Equazioni ellitiche del secundo ordine e spazi $L^{2,\lambda}$. Ann. Mat. Pura e Appl. 69, 321-380 (1965).

[F] Fuchs, M., Variational inequalities for vector-valued functions with non-convex obstacles, erscheint in Analysis

[Fe] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[G] Giaquinta, M., Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems, SFB 72, Vorlesungsreihe No. 6, Bonn 1981.

[Gr] Grüter, M., Über die Regularität schwacher Lösungen des Systems $\Delta x = 2H(x)x_u \wedge x_v$, Dissertation Düsseldorf 1979.

[GT] Gilbarg, D.,Trudinger, N.S., Elliptic partial differential equations, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[Gu] Guisti, E., Precisazione delle funzioni di $H^{1,p}$ e singolaritsà delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari, Boll.UMI 2,71-76(1969)

[H1] Hildebrandt, S., Ein einfacher Beweis für die Regularität der Lösungen gewisser zweidimensionaler Variationsprobleme unter freien Randbedingungen, Math. Ann. 194,316-331(1971).

[H2] Hildebrandt, S., On the regularity of solutions of two dimensional variational problems with obstructions, Comm. Pure Appl. Math. 25,479-496(1972)

[H3] Hildebrandt, S., Interior $C^{1+\alpha}$-regularity of solutions of two-dimensional variational problems with obstacles, Math. Z.131,233-240(1973).

[H4] Hildebrandt, S.,Quasilinear elliptic systems in diagonal form, SFB 72, Vorlesungsreihe No.11,1982.

[HKW] Hildebrandt, S., Kaul, H., Widmann,K.-O., An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds, Acta Math. 138,1-46(1977).

[HW1] Hildebrandt, S.,Widmann, K.-O., Variational inequalities for vectorvalued functions, J. für reine u. angew. Math. 309,191-220(1979).

[HW2] Hildebrandt, S., Widmann, K.-O., Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order, Math. Z. 142,67-86(1975).

[J] Jost, J., Harmonic mappings between Riemannian manifolds, ANU-Press 1984.

[JK] Jäger, W., Kaul, H., Rotationally symmetric harmonic maps from a ball into a sphere and the regularity problem for weak solutions of elliptic systems, J für reine u. angew. Math. 343,146-161(1983).

[JM] Jost, J., Meier, M., Boundary regularity for minima of certain quadratic functionals, Math. Ann. 262,549-562(1983)

[KS] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G., An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New York-London, 1980.

[M] Morrey, C.B., Multiple integrals in the calculus of variations Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[MS] Meyers, N.,Serrin, J., H=W, Proc. Nat. Ac. Sc.51(1964)

[S] Schoen, R., Analytic aspects of the harmonic map problem, Seminar on nonlinear partial differential equations , Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1984

[SU1] Schoen, R., Uhlenbeck, K., A regularity theory for harmonic maps, J. Differential Geometry 17,307-335(1982)

[SU2] Schoen, R., Uhlenbeck, K., Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps, J. Differential Geometry 18, 253-266(1983).

[T1] Tomi, F.,Minimal surfaces and surfaces of presribed mean curvature spanned over obstacles, Math. Ann. 190, 248-264(1971)

[T2] Tomi, F., Variationsprobleme vom Dirichlet Typ mit einer Ungleichung als Nebenbedingung, Math. Z. 128, 43-74(1972)

Druck und Verarbeitung: Dissertations Druck Darmstadt, Tel. 06151/21353